

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Donner la régularité de la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ 0 &\mapsto 0 \\ x &\mapsto x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{Arctan}(x). \end{aligned}$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. La fonction suivante admet-elle un point fixe ?

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^5 + 2. \end{aligned}$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{Arctan}(\text{Arcsin}(x)). \end{aligned}$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Soient x et y deux réels. Soit n un entier naturel non nul. Donner la limite, si elle existe, de la suite de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n.$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction :

$$\begin{aligned} g: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{Arcsin}(e^x - 1 - x). \end{aligned}$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Soient x et y deux réels. Soit n un entier naturel non nul. Donner la limite, si elle existe, de la suite de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^{n^2}.$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction :

$$\begin{aligned} g: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{\text{Arctan}(x^2)}. \end{aligned}$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Considérons la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-(x-3)^2}.$$

Peut-on lui appliquer le théorème de Rolle ?

2. Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Montrer qu'une fonction de classe C^2 admet un développement limité à l'ordre 2. Qu'en est-il de la réciproque ?
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Argsh}(x).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Donner un exemple de fonction illustrant le théorème de Rolle.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) + \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(\sin(x)).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Calculer, si elles existent, les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) + \sin(x)}{\text{Arctan}(x) + \text{Arcsin}(x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e}{\log(1+x)}.$$

2. La fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^x + \text{Arctan}(x)$$

admet-elle un point fixe ?

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Considérons la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - e^{-x}.$$

Admet-elle un point fixe?

2. Donner un développement de Taylor à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Arcsin}(x).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto x^{5/2} \sin(1/x) \quad \text{si } x \neq 0.$$

- Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .
- La fonction f est-elle dérivable deux fois en 0?

2. Faire l'étude complète de la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x)).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Donner un exemple de fonction continue sur $[0, 1]$ et non dérivable en $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.
2. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \text{Arcsin}(x)}{\tan(x) + \text{Arctan}(x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log(x) e^{(x-1)^2}}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arcsin}(\sin(1/x))}{\text{Arctan}(\tan(1/x))}.$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Donner la construction de la fonction Arctan.
2. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x + \tan(x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sin(\pi x)}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x^2} - e^{-1/x^2}}.$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \sqrt{2}/2}{\cos(x) - \sqrt{2}/2}.$$

2. Montrer qu'une fonction f continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ est une fonction bornée sur \mathbb{R} .

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 + 1.$$

Cette fonction admet-elle un point fixe ?

2. Faire l'étude complète de la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 + 1} - x\sqrt{x} \right).$$

2. Étudier la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \text{ si } x < 0, \\ x \mapsto \sin(x) \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ x \mapsto \log\left(\frac{2ex}{\pi}\right) \text{ si } x > \frac{\pi}{2}.$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Simplifier les expressions :

- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})$ pour $x < 0$.
- $E[|\cos(x)|]$, où $E[a]$ désigne la partie entière du nombre a .

2. Étudier les variations de la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{\log(x^2 + 1)}{2 + \cos^2(x)}\right).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Donner un exemple de fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , non dérivable en $\frac{1}{3}$ et non dérivable en $\frac{2}{3}$.
2. Étudier la suite définie par :

$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Considérons la fonction :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x^5}.$$

Peut-on la prolonger par continuité ? Cette fonction est-elle dérivable ?

2. Calculer la somme des deux fonctions :

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{Arctan}(x).$$

$$g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right).$$

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x/2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

2. Soit g la fonction définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^4 + x + 1,$$

Admet-elle des points fixes ? Peut-on les encadrer à 10^{-2} près ?

COLLE

Fonctions d'une variable réelle

△

1. Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| = |g(x)|$. Que peut-on dire de f et g si on les suppose continues ?
2. Tracer la fonction :

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$0 \mapsto 0$$

$$x \mapsto x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \text{ si } x \neq 0.$$