HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Fabien Mehdi Pazuki**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

MAÎTRE DE CONFÉRENCES HABILITÉ À DIRIGER DES RECHERCHES

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

****

PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

****

Soutenue le 1 décembre 2017 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux,

après avis de :

S. DAVID	Professeur, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie	**Rapporteur**
J. KRAMER	Professeur, Humbolt Universität Berlin	**Rapporteur**
S. SIKSEK	Professeur, Warwick University	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen composée de :

F. AMOROSO	Professeur, Université de Caen	**Examinateur**
Y. ANDRÉ	Directeur de Recherches CNRS, IMJ-PRG	**Examinateur**
Yu. BILU	Professeur, Université de Bordeaux	**Examinateur**
S. DAVID	Professeur, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie	**Rapporteur**
C. GASBARRI	Professeur, Université de Strasbourg	**Examinateur**
J. KRAMER	Professeur, Humbolt Universität Berlin	**Rapporteur**
S. SIKSEK	Professeur, Warwick University	**Rapporteur**

- 2017 -

Remerciements

Je tiens à remercier Sinnou David, Jürg Kramer, Samir Siksek, rapporteurs de ce mémoire d'habilitation. Mes remerciements vont aussi à Francesco Amoroso, Yves André, Yuri Bilu, Carlo Gasbarri, membres examinateurs du jury. À eux sept : je suis très heureux et très fier de vous voir officiellement en première page ici. Je souhaite étendre les remerciements à Pascal Autissier, Henri Cohen, Marc Hindry, Qing Liu, Gaël Rémond, Joe Silverman, qui avait participé à mon jury de thèse de doctorat en 2008 et ont contribué depuis lors à l'émergence de plusieurs idées dans mon travail. À eux treize : j'admire vos contributions en mathématiques et je n'aurai de cesse de chercher à vous intéresser avec mes résultats, ou plus humblement avec mes questions.

Les mathématiques développées dans mes recherches sont nourries de conversations et de la lecture des travaux de nombreux autres chercheurs et enseignants-chercheurs. Je ne me risque pas à dresser la liste de leurs noms ici de peur d'en oublier, mais si vous avez déjà conversé de mathématiques avec moi, sachez que cela vous concerne !

Merci à l'équipe de théorie des nombres de Bordeaux. Une grande famille à la diversité extraordinaire, ses séminaires exigeants, les conférences mémorables, et la belle variété de théorèmes que j'ai pu apprendre pendant ces années en son sein.

Merci à l'équipe de théorie des nombres de Copenhague. Merci pour la confiance des scandinaves ; les moyens qu'ils ont mis à ma disposition ont permis la création collaborative du Nordic Number theory Network (aussi appelé $\mathbb{N}^3$), réseau qui a vu, et qui verra naître encore dans l'avenir, nous l'espérons, des activités arithmétiques de grande qualité.

Merci à mes co-auteurs, Henri Cohen, Amílcar Pacheco, Philipp Habegger, Fedor Bogomolov, Lars Halle, Sho Tanimoto. J'ai beaucoup aimé travailler avec chacun de vous par le passé, et j'espère que l'avenir nous sera fécond !

Merci à l'arbitre anonyme. Globalement toujours de bon conseil, il m'a inspiré en plusieurs occasions, à la fois dans mon travail de chercheur et dans mon propre travail d'arbitre.

Merci à mes étudiants, plus particulièrement les étudiants en thèse de doctorat que j'ai eu la chance de co-encadrer. J'ai appris beaucoup en les fréquentant, j'ai fait mon possible pour que ce soit réciproque.

Merci aux collègues qui ont investi du temps et de l'énergie pour permettre à la communauté de fonctionner financièrement. Citons notamment les projets suivants, dans lesquelles s'incrivent une partie de mes activités scientifiques : Pascal Autissier (BQR Autissier-Pazuki), Anna Cadoret (ANR Arivaf), Yuri Bilu (ANR Hamot), Marc Hindry et Amílcar Pacheco (Math. Am. Sud), Eric Gaudron (ANR Gardio), Lars Hesselholt (Niels Bohr Professorship), les équipes du CNRS (GDRI/IRN GandA), le programme ALGANT. Citons aussi l'excellent travail de la Société Arithmétique de Bordeaux.

Merci aux collègues administrateurs et à leurs équipes performantes qui nous aident au quotidien à tous les niveaux. Les bonnes conditions de préparation et de soutenance de cette habilitation sont prodiguées par leurs efforts.

Merci à mes amis du monde entier. Merci à ma famille pour les moments passés ensemble, trop rares il est vrai, et grand merci à Teresa pour la richesse de nos partages.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation

Ce mémoire propose une collection de travaux effectués après ma thèse de doctorat. Tous les travaux présentés ci-après traitent de différentes facettes de l'arithmétique des variétés abéliennes sur les corps de nombres. Au sein de chaque chapitre, les travaux sont présentés dans l'ordre chronologique. Nous allons tour à tour aborder les thèmes suivants.

Dans le Chapitre 2, on apporte une réponse, en collaboration avec Philipp Habegger, à la question qui suit : y a-t-il beaucoup de courbes de genre 2 sur $\overline{\mathbb{Q}}$ avec bonne réduction partout et dont la jacobienne admet des multiplications complexes ?

Le Chapitre 3 propose une comparaison de hauteurs de variétés abéliennes (dont la paternité est dûe à Bost et David) et un résultat compagnon et indépendant, concernant uniquement les courbes elliptiques, traitant de la variation de l'invariant j par isogénie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Le Chapitre 4 traite de questions sur la répartition des points rationnels sur les variétés. On propose des résultats sur la densité de points prépériodiques sur les sous-variétés de variétés abéliennes. On verra aussi comment obtenir une borne supérieure sur le nombre de points rationnels des courbes sur un corps de nombres, conditionnellement à un énoncé de type Lang-Silverman. Enfin on propose les premiers exemples de variétés de Calabi-Yau de dimension 3, fibrées en surfaces abéliennes, dont les points rationnels vérifient la propriété de Zariski densité potentielle.

Le Chapitre 5 traite lui aussi de points rationnels, mais est nettement focalisé sur les rangs et régulateurs des groupes de Mordell-Weil. On y lira tout d'abord des résultats de descente explicite sur les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$. On propose ensuite une majoration du rang linéaire en la hauteur de la variété. On discute enfin d'une propriété de Northcott conjecturale pour le régulateur des groupes de Mordell-Weil, propriété qui serait le pendant abélien d'un résultat inconditionnel obtenu pour les familles de régulateurs de corps de nombres.

Le Chapitre 6 n'est pas un chapitre technique, il présente brièvement les thèmes abordés par les étudiants que j'ai eu la chance de co-encadrer en thèse de doctorat.

1.2 Définitions

On rappelle ici des définitions utiles dans toute la suite, la hauteur de Faltings d'une variété abélienne et la hauteur de Néron-Tate d'un point rationnel. Soit k un corps de nombres de degré d. On note M_k l'ensemble de ses places (deux à deux non équivalentes), M_k^∞ l'ensemble de ses places archimédiennes et M_k^0 l'ensemble de ses places finies. Pour toute place v de k on note k_v le complété de k pour la valuation $|.|_v$ associée où on normalise $|p|_v = p^{-1}$ pour toute place finie v au-dessus d'un nombre premier p. On pose $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$ et $n_v = d_v/d$.

1.2.1 Hauteur de Faltings

Soient k un corps de nombres de degré d et $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ le spectre de son anneau d'entiers. Un *fibré vectoriel métrisé* de rang r sur S est un $\mathcal{O}_k$-module projectif $\mathcal{L}$ de rang r muni d'une collection $\{||.||_v\}_{v\in M_k^\infty}$ telle que $||.||_v$ soit une norme hermitienne sur le k_v-espace vectoriel $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_k}\overline{k}_v$, vérifiant $||x||_v = ||\overline{x}||_{\overline{v}}$ pour tout plongement $v : k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Le *degré d'Arakelov* d'un fibré en droites métrisé $(\mathcal{L}, ||.||_v)$ sur S est défini, en prenant un élément non nul $s \in \mathcal{L}$:

$$\widehat{\deg}(\mathcal{L}) = \log \mathrm{Card}\left(\mathcal{L}/s\mathcal{O}_k\right) - \sum_{v\in M_k^\infty} d_v \log \|s\|_v.$$

La formule du produit nous assure que ce degré ne dépend pas du choix de section s non nulle.

Soit alors A/k une variété abélienne de dimension $g \geq 1$. Soient $\mathcal{A} \to S$ son modèle de Néron, $\varepsilon : S \to \mathcal{A}$ sa section neutre et $\Omega^g_{\mathcal{A}/S}$ le faisceau des g-formes différentielles, qui est localement libre de rang 1. On pose $\omega_{\mathcal{A}/S} = \varepsilon^*(\Omega^g_{\mathcal{A}/S})$; c'est un fibré en droites sur $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ qu'on peut identifier au module de ses sections globales. On munit ce fibré des métriques suivantes :

$$\forall \alpha \in \omega_{\mathcal{A}/S} \otimes_v \mathbb{C},\;\; ||\alpha||_v^2 = \frac{i^{g^2}}{(c_0)^g}\int_{A_v(\mathbb{C})} \alpha\wedge\overline{\alpha}, \tag{1.1}$$

où on a identifié α à une section globale de $\Omega^g_{\mathcal{A}/S}$ et où $c_0 > 0$ est une constante de normalisation dont la valeur peut varier selon les (h)auteurs. On gardera dans la suite du texte $c_0 = (2\pi)^2$, qui assure la positivité de la hauteur par une inégalité classique de Bost. On définit alors :

Définition 1.2.1. Soit A/k une variété abélienne semi-stable définie sur un corps de nombres k de degré d. On appelle dans tout le texte *hauteur de Faltings* la quantité :

$$h(A/k) = \frac{1}{d}\,\widehat{\deg}(\omega_{\mathcal{A}/S}).$$

Lorsque la variété A/k est semi-stable, la hauteur de Faltings est invariante par extension finie de corps de nombres et on la notera alors tout simplement $h(A) = h(A/k) = h(A/\overline{\mathbb{Q}})$.

1.2.2 Hauteur de Néron-Tate

Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ l'espace projectif sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de dimension n. Pour tout point projectif $P = (x_0 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et tout k corps de nombres contenant les coordonnées de P, on définit la hauteur de P comme étant :

$$h(P) = \sum_{v\in M_k} n_v \log \max_{i\in[\![0,n]\!]} |x_i|_v.$$

C'est un nombre positif ou nul qui ne dépend ni de la normalisation du point x (formule du produit), ni du corps contenant P (formule d'extension). Une variante consiste à remplacer la norme du maximum archimédien par une norme ℓ^2.

Soit X/k une variété projective sur k, soit $\mathcal{D}$ un diviseur très ample sur X et soit $\varphi_{\mathcal{D}}$ un plongement de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$. Alors on peut définir une hauteur sur X, appelée hauteur de Weil, de la manière suivante : pour tout point $\bar{k}$-rationnel P (*i.e.* $P \in X(\bar{k})$) on pose :

$$h_{X,\mathcal{D}}(P) := h(\varphi_{\mathcal{D}}(P)).$$

On vérifie ensuite que cette définition ne dépend pas du morphisme $\varphi_{\mathcal{D}}$, à une fonction bornée près.

Soit A/k une variété abélienne sur k, soit $\mathcal{D}$ un diviseur ample et symétrique sur A. On se ramène au cas très ample par multiplication de $\mathcal{D}$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on note $[n]P$ le point $[n-1]P + P$, où le symbole « $+$ », est ici l'addition sur A, et $[1]P = P$. On définit alors la hauteur canonique, ou hauteur de Néron-Tate, d'un point $P \in A(k)$, par la formule :

$$\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(P) := \lim_{n \to +\infty} \frac{h_{A,\mathcal{D}}([n]P)}{n^2}.$$

La limite est donc un réel positif ou nul. L'une des propriétés cruciales de cette hauteur est le fait qu'elle s'annule si et seulement si le point P est un point de torsion.

1.3 Récapitulatif des travaux de thèse

Les travaux de ma thèse étaient concentrés sur une conjecture de minoration de la hauteur canonique sur une variété abélienne de type Lang-Silverman, dont on donne une version dans le Chapitre 4, la conjecture 4.2.8, minoration de la forme

$$\widehat{h}_{A,L}(P) \geq c_1(g,k) h(A/k), \tag{1.2}$$

où A est une variéte abélienne definie sur le corps de nombres k, le fibré L est ample et symétrique, P est un point k-rationnel non-trivial de A, le terme $h(A/k)$ est la hauteur de Faltings de A et $c_1(g,k)$ est un réel strictement positif qui dépend uniquement de la dimension g et du corps k.

Dans l'article *Remarques sur une conjecture de Lang* [Paz10a], on obtient l'équivalent suivant lorsque N tend vers l'infini (et N vérifiant de plus des conditions nécessaires, notamment à l'existence des points de Heegner) :

$$\widehat{h}_{J_0(N),L}(P_K) \simeq \frac{3h_K u_K}{g(N)} h(J_0(N)), \tag{1.3}$$

où K est un corps quadratique imaginaire de nombre de classes h_K et dont le nombre d'unités est $2u_K$, et P_K un point de Heegner associé. La variété $J_0(N)$ est la jacobienne de la courbe modulaire $X_0(N)$, le fibré L est ample et symétrique, $g(N)$ est la dimension de $J_0(N)$. Notons qu'on utilise l'asymptotique de Jorgenson et Kramer qui donnent dans [JoKr09] page 4, prolongeant des travaux de Abbès, Michel, Ullmo,

$$h(J_0(N)) \simeq \frac{g(N)}{3} \log N$$

lorsque N tend vers l'infini, N étant sans facteur carré et premier à 6. Ce résultat semble donc indiquer que la quantité $c_1(g,k)$ dans l'inégalité (1.2) doit dépendre de g.

Dans l'article *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les surfaces abéliennes* [Paz13b], on obtient un résultat de minoration de la hauteur de Néron-Tate qui répond partiellement à la question de Lang-Silverman pour les jacobiennes de courbes de genre 2.

Pour une surface abélienne principalement polarisée A/k avec k un corps de nombres et v une place infinie, on peut uniformiser les points complexes $A(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$ avec $\tau_v = \begin{bmatrix} \tau_{1,v} & \tau_{12,v} \\ \tau_{12,v} & \tau_{2,v} \end{bmatrix}$ dans le domaine de Siegel $\mathfrak{F}_2$. Dans cette uniformisation les produits de courbes elliptiques correspondent exactement au lieu ($\tau_{12,v} = 0$) dans l'ensemble $\mathfrak{F}_2$. On introduit le produit :

$$\mathrm{s}_\infty(A) = \prod_{v \in M_k^\infty} |\tau_{12,v}|^{d_v}. \tag{1.4}$$

Il est donc aisé de voir que $\mathrm{s}_\infty(A) = 0$ si et seulement si A est un produit de courbes elliptiques. On appelle de plus *trace archimédienne* de A la quantité :

$$\mathrm{Tr}_\infty(A) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v). \tag{1.5}$$

On note $D = 2^8\,\mathrm{disc}(F)$ le discriminant de norme minimale d'un modèle hyperelliptique entier $y^2 = F(x)$ de la courbe sous-jacente.

Théorème 1.3.1. *Soit k un corps de nombres de degré d. Soient C/k une courbe de genre 2 admettant un point de Weierstrass rationnel sur k et A sa jacobienne. Alors si A est géométriquement simple, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout point $P \in A(k)$ l'une des deux propositions suivantes est vraie :*

(*i*) *$[n]P = O$ pour un entier $1 \leq n \leq 2{\cdot}10087^{4\cdot 3^{16}d}$,*

(*ii*) $\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c_2 \left(\mathrm{Tr}_\infty(A) - \dfrac{5}{3} \log \dfrac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)} \right)$,

où on peut prendre $c_2 = 0,03/\left(d\,10087^{8\cdot 3^{16}d}\right)$. On a de plus la majoration

$$c_3\,\mathrm{Tr}_\infty(A) + c_4 \log \frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)} \geq h(A/k),$$

où on peut prendre : $c_3 = \frac{6\pi}{10d}$ et $c_4 = \frac{1}{10d}$.

Chapitre 2

Jacobiennes CM et réduction des courbes

Les résultats de ce chapitre concernent les courbes de genre 2 définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il existe une infinité de telles courbes avec bonne réduction partout (voir l'Exemple 0.9 de [MB]), et une infinité de telles courbes admettant une jacobienne à multiplication complexe par un ordre maximal. On montre avec Philipp Habegger qu'il est rare, en un sens bien précis, pour une courbe de genre 2 de jouir de ces deux propriétés simultanément.

Travaux présentés

Bad reduction of curves with CM jacobians, article publié à Compositio Mathematica, 153.12, p. 2534–2576, 2017, en collaboration avec Philipp Habegger.

Soit C une courbe projective lisse de genre 2, géométriquement connexe définie sur un corps de nombres k. Soit $\mathrm{Jac}(C)$ sa jacobienne. On note $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}(C))$ l'anneau des endomorphismes géométriques de $\mathrm{Jac}(C)$. On s'intéresse à la question suivante : existe-t-il des premiers de k tels que C a mauvaise réduction stable en $\mathfrak{p}$ et $\mathrm{Jac}(C)$ bonne réduction en $\mathfrak{p}$?

Dans le cas où $\mathrm{Jac}(C)$ a multiplication complexe, les travaux de Serre et Tate [SeTa68] prouvent que $\mathrm{Jac}(C)$ a potentiellement bonne réduction partout. Sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la question initialement posée devient donc : existe-t-il des premiers de mauvaise réduction stable pour la courbe $C/\overline{\mathbb{Q}}$?

Nous obtenons la réponse suivante, qui traite essentiellement du cas des surfaces modulaires de Hilbert et de leurs points entiers.

Théorème 2.0.1. *Soit F un corps quadratique réel. Il existe un nombre fini de classes de $\overline{\mathbb{Q}}$-isomorphismes de courbes de genre 2 définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admettant bonne réduction partout et telles que* $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}\, C)$ *est l'ordre maximal d'un corps quartique CM, cyclique et contenant F.*

Ce théorème est obtenu grâce à une étude de la hauteur de Faltings de $\mathrm{Jac}(C)$. On produit tout d'abord deux formules explicites pour cette hauteur. La première a été démontrée par Colmez dans [Col93] et [Obu13], le corps K étant une extension abélienne [1] de $\mathbb{Q}$. La seconde formule explicite est une décomposition en composantes locales et s'inspire fortement de [Paz13b]. La mise en concurrence de ces deux formules permet d'obtenir le théorème suivant, démontré lui aussi dans [HaPa17], et qui implique le théorème 2.0.1.

Théorème 2.0.2. *Soit F un corps quadratique réel. Il existe une constante $c_5(F) > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Soit C une courbe de genre 2 définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et telle que* $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}\, C)$ *est l'ordre maximal d'une extension quadratique imaginaire K/F avec $K/\mathbb{Q}$ cyclique. Alors il existe un corps de définition k tel que*

$$\log \Delta_K \leq c_5(F)\left(1 + \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\log \mathrm{N}(\Delta_{\min}(C_k))\right), \tag{2.1}$$

où N *est la norme de $k/\mathbb{Q}$, le réel positif Δ_K est le discriminant du corps K et $\Delta_{\min}(C_k)$ est le discriminant minimal de C/k. Le membre de droite est invariant par extension finie de k.*

Nous donnons à présent les grandes lignes de la preuve. Notons $h(\mathrm{Jac}(C))$ la hauteur de Faltings stable de la jacobienne de C. La première formule explicite permet de calculer $h(\mathrm{Jac}(C))$ via la dérivée logarithmique d'une fonction L associée à l'extension K/F. Une fois cette formule établie, un travail de théorie analytique des nombres permet d'aboutir à

$$h(\mathrm{Jac}(C)) \geq c_6 \log \Delta_K + c_7(F), \tag{2.2}$$

où $c_6 > 0$ est universelle et $c_7(F) \in \mathbb{R}$ ne dépend que du corps quadratique réel F.

La seconde formule explicite donne un lien direct entre $h(\mathrm{Jac}(C))$ et la somme du terme non-archimédien $\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\log \mathrm{N}(\Delta_{\min}(C_k))$ et d'un terme archimédien du type

$$-\sum_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|\Psi(\tau_v)\|_v,$$

où τ_v est une matrice bien choisie vérifiant $\mathrm{Jac}(C)(\overline{k}_v) \simeq \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$ et Ψ est une forme modulaire de poids 10, classiquement donnée comme un produit de fonctions thêta. Les matrices τ sont des matrices 2×2 symétriques, dont le terme anti-diagonal τ_{12} vérifie $\Psi(\tau) = 0 \Leftrightarrow \tau_{12} = 0$. Dans le cas d'une surface abélienne CM simple, on a $\tau_{12} \neq 0$, et comme τ_{12} est un nombre algébrique non nul, le théorème de Liouville garantit que τ_{12} est distant de zéro. Un argument délicat d'équidistribution basé sur un théorème de Zhang [Zha05] permet alors d'obtenir l'inégalité, valable pour tout $\varepsilon > 0$,

$$h(\mathrm{Jac}(C)) \leq \varepsilon \log \Delta_K + c_8(\varepsilon, F) + \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\log \mathrm{N}(\Delta_{\min}(C_k)). \tag{2.3}$$

où $c_8(\varepsilon, F) \in \mathbb{R}$ dépend uniquement du paramètre ε et de F. La conjonction de (2.2) et (2.3) donne alors (2.1).

Ce résultat de finitude ouvre tout un champ de questions intrigantes : peut-on trouver ces courbes de genre 2 particulières ? Peut-on au moins majorer le nombre de ces courbes exceptionnelles ? Des estimations effectives ont été obtenues pour les points CM d'espaces de modules de courbes elliptiques (voir par exemple [BMZ13], explicitant [And98]), il sera intéressant de développer des techniques nous rendant aptes à traiter des espaces de modules de dimension plus grande.

1. On n'utilise donc pas de formule de Colmez "en moyenne".

Chapitre 3

Hauteur de Faltings et hauteur thêta

La hauteur d'une variété abélienne peut être définie de plusieurs manières différentes, chacune d'entre elle ayant un intérêt propre. Si la variété est donnée par un système d'équations polynomiales dans un espace projectif, prendre la hauteur des coefficients de ces polynômes est une idée naturelle, on affine en choisissant un modèle bien choisi ; c'est l'idée de la hauteur thêta. Une variante consiste à prendre la hauteur du ou des invariants de la classe d'isomorphie des modèles projectifs considérés. Par ailleurs, la hauteur différentielle, ou hauteur de Faltings, repose sur la structure differentielle de la variété et ne dépend d'aucun choix de plongement ou de polarisation. C'est le choix intrinsèque.

Les différentes hauteurs ayant chacune leur mot à dire, des résultats de comparaison entre ces notions sont utiles pour pouvoir bénéficier de leurs avantages respectifs. Ce chapitre en présente deux, indépendants : le premier est une comparaison en dimension générale, dont la stratégie de preuve est dûe à Bost et David. Le second est un résultat particulier aux courbes elliptiques, qui explique comment transférer la variation de la hauteur de Faltings par isogénie à l'étude des j-invariants.

Travaux présentés

Theta height and Faltings height, article publié au Bulletin de la Société Mathématique de France, 140.1, p. 19–49, 2012.

Modular invariant and isogenies, prépublication sur https ://arxiv.org/abs/1611.01094, 2016.

3.1 Autour des idées de Bost et David

Notons $\mathfrak{S}_g$ l'espace de Siegel et $\mathfrak{F}_g$ le domaine fondamental. On considère une variété abélienne A définies sur un corps de nombres k, polarisée par un fibré ample et symétrique L et munies d'une structure thêta de niveau r, où $r > 0$ est un entier pair. On dispose donc d'un plongement $\Theta : A \to \mathbb{P}^{r^2-1}$, et on introduit la quantité $h_\Theta(A, L) = h(\Theta(0_A))$ (où h est la hauteur projective avec la métrique ℓ^2 aux places archimédiennes), communément appelée *hauteur thêta*. Suivant la stratégie de Bost et David, on obtient les inégalités suivantes.

Théorème 3.1.1. *Soit A une variété abélienne de dimension g, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, munie d'une polarisation principale donnée par un fibré L ample et symétrique. Soit k un corps de définition de (A, L). Pour tout plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, soit $\tau_\sigma \in \mathfrak{F}_g$ tel qu'il existe un isomorphisme entre variétés abéliennes complexes principalement polarisées $A_\sigma(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau_\sigma\mathbb{Z}^g)$. On dispose alors des inégalités :*

$$c_9(r,g) \leq h_\Theta(A,L) - \frac{1}{2}h(A) - \frac{1}{4[k:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:k\hookrightarrow\mathbb{C}} \log(\det(\operatorname{Im}\tau_\sigma)) \leq c_{10}(r,g)\ .$$

Les quantités $c_9(r,g)$ and $c_{10}(r,g)$ ne dépendent que de r et de la dimension g et on pourra prendre

$$c_9(r,g) = g\left[\frac{1}{4}\log(4\pi) - \frac{1}{2}r^{2g}\log(r)\right],\ \ c_{10}(r,g) = \frac{g}{4}\log(4\pi) + g\log(r) + \frac{g}{2}\log\left(2 + \frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}2^{\frac{g^3}{4}}\right).$$

La preuve de se résultat repose en grande partie sur la construction des modèles de Moret-Bailly des variétés abéliennes, qui sont en particulier des schémas en groupes semi-stables munis d'un fibré en droites cubiste. La construction de ces modèles imposent de plus dans notre cadre de rendre rationnels le sous-groupe des points de r-torsion, où r est le niveau de la structure thêta considérée. On utilise ensuite des calculs de pentes d'Arakelov et des estimations locales pour parvenir au théorème 3.1.1.

Couplé à un résultat de type Lemme Matriciel fournissant un contrôle sur la taille de $\operatorname{Im}\tau$ en fonction de la hauteur de A (voir [Mas87] pour la version classique, [Gra01] pour une version avec la hauteur de Faltings, ou [Aut13] pour une version quasi-optimale), on obtient une inégalité pratique :

$$|h_\Theta(A,L) - \frac{1}{2}h(A)| \leq c_{11} + c_{12}\log\max\{1, h(A)\}, \tag{3.1}$$

pour c_{11} et c_{12} des réels positifs ne dépendant que de la dimension g et du niveau r. Notons que cette comparaison permet de déduire que la hauteur de Faltings vérifie la propriété de Northcott attendue, car c'est le cas pour la hauteur thêta.

3.2 Courbes elliptiques et isogénies

Deux courbes elliptiques définies sur un corps de nombres k sont isomorphes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si elles ont le même j-invariant. Une question naturelle se pose : comment varie le j-invariant dans une classe d'isogénie ? On obtient le résultat suivant dans cette direction de recherche.

Théorème 3.2.1. *Soit $\varphi : E_1 \to E_2$ une $\overline{\mathbb{Q}}$-isogénie entre deux courbes elliptiques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soient j_1 et j_2 leurs j-invariants respectifs. Alors on a*

$$|h(j_1) - h(j_2)| \leq 9.204 + 12\log\deg\varphi, \tag{3.2}$$

et

$$h(j_1) - h(j_2) \leq 10.68 + 6\log\deg\varphi + 6\log(1 + h(j_1)), \tag{3.3}$$

où $h(.)$ est la hauteur de Weil logarithmique et absolue.

La hauteur de l'invariant j est intimement liée à la hauteur thêta de la courbe elliptique associée. La preuve du théorème repose cependant sur une comparaison entre hauteur de Faltings et hauteur de l'invariant j plus fine que celle qu'on peut déduire du théorème 3.1.1, couplée à une estimation classique (Faltings, Raynaud) de la hauteur de Faltings dans une classe d'isogénie.

Parmi les corollaires obtenus dans le texte [Paz16c], nous choisissons celui ci-après. Pour tout entier naturel non nul m, le polynôme modulaire Φ_m est le polynôme minimal de $j(mz)$ sur le corps $\mathbb{C}(j(z))$. C'est un polynôme en deux variables $\Phi_m(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$, vérifiant $\Phi_m(X,Y) = \Phi_m(Y,X)$ et $\Phi_m(j(mz),j(z)) = 0$. Son degré en chaque variable est égal à $\psi(m) = m\prod_{p|m}(1+p^{-1})$. Soit $j_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ le j-invariant d'une courbe elliptique E_0. Alors les racines de $\Phi_m(X,j_0)$ sont exactement les j-invariants de courbes elliptiques munies d'une isogénie cyclique de degré m vers E_0.

Les coefficients du polynôme Φ_m grossissent rapidement avec m. Leur croissance asymptotique est calculée dans [Coh84]. Introduisons la hauteur d'un polynôme de $\mathbb{C}[X,Y]$ par la formule

$$h_\infty\Big(\sum_{0\leq s,k\leq n} c_{s,k}X^sY^k\Big) = \log \max_{0\leq s,k\leq n} |c_{s,k}|.$$

Lorsque m tend vers l'infini, [Coh84] démontre

$$h_\infty(\Phi_m) = 6\psi(m)\Big(\log m - \sum_{p|m}\frac{1}{p}\log p + O(1)\Big). \tag{3.4}$$

On obtient ici une inégalité valable pour tout m, mais moins fine que l'asymptotique.

Corollaire 3.2.2. *Soit m un entier naturel non nul. Alors*

$$h_\infty(\Phi_m) \leq \psi(m)\Big(6\log m + \log\psi(m) + 6\log(12\log m + 2\log\psi(m) + 25.2) + 15.7\Big).$$

Cette majoration n'est pas optimale mais est inconditionnelle. Dans le cas où $m=\ell$ est un nombre premier on a $\psi(\ell) = \ell+1$, Bröker et Sutherland [BrSu10] obtiennent un majorant un peu plus fin, leur inégalité étant

$$h_\infty(\Phi_\ell) \leq 6\ell\log\ell + 16\ell + 14\sqrt{\ell}\log\ell.$$

Obtenir une majoration optimale dans le corollaire 3.2.2 est l'objet de travaux actuels, suite à une conversation avec Pascal Autissier.

Chapitre 4

Points rationnels et densité au sens de Zariski

Ce chapitre présente trois résultats liés à la problématique de la répartition des points rationnels sur les variétés algébriques. Le premier concerne une généralisation dans le cadre de la dynamique arithmétique de la conjecture de Manin-Mumford, démontrée par Raynaud en 1983 : on s'intéresse à la densité des points prépériodiques sur les sous-variétés d'une variété projective, et on donne des contre-exemples abéliens à la première tentative de généralisation proposée dans [Zha06], conjecture 1.2.1. Le second résultat de ce chapitre est une borne uniforme sur le nombre de points rationnels des courbes algébriques, borne conditionnelle à une conjecture de minoration de hauteur de type Lang-Silverman. Le troisième paragraphe présente un résultat de Zariski densité *potentielle*, c'est-à-dire après une éventuelle extension finie du corps de base, et concerne des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 fibrées en surfaces abéliennes. Les travaux associés présentent des arguments de natures différentes : le premier résultat repose sur une étude de polarisations de morphismes sur des variétés abéliennes, le second sur la théorie des hauteurs et structures euclidiennes sur les variétés abéliennes, le troisième sur le Programme du Modèle Minimal.

Travaux présentés

Zhang's conjecture and squares of abelian surfaces, article publié aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série I, 348, p. 483–486, 2010.

Polarized morphisms between abelian varieties, article publié au International Journal of Number Theory, 9.02, p. 405–411, 2013.

Bornes sur le nombre de points rationnels des courbes - en quête d'uniformité, article prépublié sur https ://arxiv.org/abs/1512.04907.

Abelian Calabi-Yau threefolds: Néron models and rational points, article à paraître aux Math. Research Letters, 2017, en collaboration avec Fedor Bogomolov, Lars Halle, Sho Tanimoto.

4.1 Manin-Mumford dynamique

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'intersection entre une sous-variété de variété projective X et l'ensemble des points prépériodiques pour un endomorphisme φ de X. On rappelle qu'un point (et plus généralement une sous-variété) P de X est dit prépériodique si son orbite sous l'action de φ est finie. Si L est un fibré en droites ample sur X, on dit que φ est polarisé par L et de poids $d \geq 2$ si $\varphi^*(L) = L^{\otimes d}$.

Conjecture 4.1.1. *(Manin-Mumford dynamique, première version, [Zha06] conjecture 1.2.1) Soit X une variété projective lisse définie sur un corps de nombres k. Soit $\psi\colon X \to X$ un endomorphisme polarisé, et soit Y une sous-variété de X. Si $Y \cap \mathrm{Prep}_\psi(X)$ est dense dans Y pour la topologie de Zariski, alors Y est une variété prépériodique pour ψ.*

Cet énoncé est assez naturel, il généralise notamment la conjecture de Manin-Mumford démontrée par Raynaud en 1983 : en effet en spécialisant $\psi = [n]$ et $X = A$ une variété abélienne, alors ψ est un morphisme polarisé avec poids n^2 et les points prépériodiques sont les points de torsion de A.

Donnons un autre exemple d'endomorphisme satisfaisant la conjecture 4.1.1. Soit A une variété abélienne et $\mathcal{L}$ un fibré ample et symétrique. Définissons α et β sur le produit A^4 par $\alpha(x, y, z, t) = (x + z, y + t, x - z, y - t)$ et $\beta(x, y, z, t) = (x + y, x - y, z + t, z - t)$. Si on note $\mathcal{L}_4 = p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*\mathcal{L} \otimes p_4^*\mathcal{L}$, où $p_i : A^4 \to A$ est la i-ème projection, alors $\alpha^*\mathcal{L}_4 = \beta^*\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_4^{\otimes 2}$, donc les morphismes α, β sont polarisés par $\mathcal{L}_4$. On vérifie immédiatement que $\alpha^2 = \beta^2$, donc si Y est la diagonale de $A^4 \times A^4$, cette sous-variété de $X = A^4 \times A^4$ admet un ensemble dense de points prépériodiques et est elle-même prépériodique sous l'action de (α, β).

D. Ghioca and T. Tucker ont produit les premiers contre-exemples à la conjecture 4.1.1, ils sont publiés dans [GTZ11]. Ils utilisent des carrés de courbes elliptiques avec multiplications complexes. Ghioca cherchait à généraliser ses contre-exemples en dimension supérieure. On trouve dans [Paz10b] des constructions sur les carrés de surfaces, suivi d'un traitement plus général dans [Paz13a], dont on reprend ici le résultat principal.

Soit k un corps de nombres contenant un corps CM et $\overline{k}$ sa clôture algébrique. Soit $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k. Soit A une variété abélienne définie sur k et admettant des multiplications complexes sur k. Soit S_1 l'ensemble des places ramifiées de k, soit S_2 l'ensemble des places de mauvaise réduction de A et soit S_3 l'ensemble des places $\mathfrak{a}$ telles que $F_{\mathfrak{a}}^n = V_{\mathfrak{a}}^n$ pour un entier n strictement positif, où $F_{\mathfrak{a}}$ est l'endomorphisme de A relevant le Frobenius géométrique en $\mathfrak{a}$, et $V_{\mathfrak{a}}$ son Verschiebung associé. On va considerer l'ensemble fini $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Théorème 4.1.2. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres k contenant le corps de multiplications complexes $\mathrm{End}_{\overline{k}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ et tel que $\mathcal{O}_k \subset \mathrm{End}_{\overline{k}}(A)$. Soit $\mathfrak{p} \notin S$. Soit $F_{\mathfrak{p}}$ le Frobenius associé à $\mathfrak{p}$ et $V_{\mathfrak{p}}$ le Verschiebung associé à $F_{\mathfrak{p}}$. Alors $F_{\mathfrak{p}}$ et $V_{\mathfrak{p}}$ sont polarisables et le système dynamique $(A \times A, F_{\mathfrak{p}} \times V_{\mathfrak{p}})$ et la sous-variété diagonale de $A \times A$, forment un contre-exemple à la conjecture 4.1.1.*

Ghioca, Tucker et Zhang proposent une nouvelle version de la conjecture tenant compte des phénomènes décrits ci-avant. Voici leur énoncé.

Conjecture 4.1.3. *(Manin-Mumford dynamique, seconde version, [GTZ11] conjecture 2.4) Soit X une variété projective lisse définie sur un corps de nombres k. Soit $\psi\colon X \to X$ un endomorphisme polarisé, et soit Y une sous-variété de X. Alors Y est prépériodique pour ψ si et seulement s'il existe un sous-ensemble Zariski dense de points $x \in Y \cap \mathrm{Prep}_\psi(X)$ tels que* *l'espace tangent à Y en x est prépériodique sous l'action induite par ψ sur la grassmanienne* $\mathrm{Gr}_{\dim Y}(T_{X,x})$.

Dans le texte [GTZ11], les auteurs démontrent cet énoncé 4.1.3 si X est une variété abélienne et si ψ est un morphisme de groupe, et traitent aussi des cas de systèmes dynamiques sur $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

4.2 Bornes sur le nombre de points rationnels des courbes

Soit C une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres k. La conjecture de Mordell, qui est depuis 1983 un théorème célèbre de Faltings [Fal83], donne la finitude de l'ensemble des points k-rationnels $C(k)$ (et donc la non Zariski densité des points rationnels). Une question naturelle a alors émergé : à quel point le cardinal $\#C(k)$ dépend-il de la courbe C ? Est-il possible de produire un majorant explicite de $\#C(k)$ et à quel point ce majorant peut-il être uniforme ? C'est à cette question d'uniformité du majorant que ce paragraphe est consacré.

On sait produire depuis Rémond [Rém00] des bornes totalement explicites et inconditionnelles. Citons une forme plus récente de son résultat, donnée dans [Rém10].

Théorème 4.2.1. *Soit C une courbe lisse, projective, géometriquement connexe et de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres k. On fixe un plongement projectif de la variété jacobienne $Jac(C)$ relatif à la puissance seizième d'un translaté du diviseur thêta. Alors on a*

$$\#C(k) \leq (2^{38+2g} \cdot [k:\mathbb{Q}] \cdot g \cdot \max\{1, h_\theta\})^{(\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)+1)\cdot g^{20}},$$

où h_θ est la hauteur thêta de $Jac(C)$ dans ce plongement et $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)$ *est le rang de Mordell-Weil de* $\mathrm{Jac}(C)(k)$.

On cherche à savoir dans quelle mesure on peut se passer de la dépendance en la jacobienne de la courbe dans l'expression du majorant. L'uniformité la plus forte est conjecturée par Caporaso, Harris, Mazur en page 2 de [CHM97] :

Conjecture 4.2.2. *Soit g un entier naturel et k un corps de nombres. Il existe une quantité $c_{13}(g,k) > 0$ telle que pour toute courbe projective lisse C de genre $g \geq 2$ définie sur k, on a*

$$\#C(k) \leq c_{13}(g,k).$$

Ce dernier énoncé est impliqué par une conjecture très ambitieuse de Bombieri et Lang via un procédé dit de corrélation qui est bien expliqué dans [CHM97]. Ce niveau d'uniformité maximal peut sembler difficile à atteindre. On pourra essayer dans un premier temps de répondre à la question classique suivante (trouvée par exemple dans [DNP07] page 102).

Conjecture 4.2.3. *Soit g un entier naturel et k un corps de nombres. Il existe une quantité $c_{14}(g,k) > 0$ telle que pour toute courbe projective lisse C de genre $g \geq 2$ définie sur k, on a*

$$\#C(k) \leq c_{14}(g,k)^{\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)+1},$$

où $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)$ *est le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur k.*

Citons aussi une version plus souple de la conjecture 4.2.3, trouvée sous forme de question dans [Maz00] page 223 :

Conjecture 4.2.4. *Soit g un entier naturel, soit k un corps de nombres, soit m un entier naturel. Il existe une quantité $c_{15}(g,k,m) > 0$ telle que pour toute courbe projective lisse C de genre $g \geq 2$ définie sur k, dont le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur k est m, on a*

$$\#C(k) \leq c_{15}(g,k,m).$$

David, Nakamaye et Philippon donnent dans le théorème 3.6 page 118 de [DNP07] une infinité de familles de courbes définies sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant la conjecture 4.2.3 (une infinité de familles est proposée pour chaque $g \geq 4$ fixé). Notons qu'il est classique de penser que la dépendance en le corps k des quantités c_{13}, c_{14}, c_{15} ne fait intervenir que le degré de k.

De nouveaux progrès, suivant une approche de ces questions basée sur l'intégration p-adique, concernent les courbes telles que la jacobienne $\mathrm{Jac}(C)$ possède un rang de Mordell-Weil sur k petit par rapport au genre de C. Initiée par des idées de Chabauty, puis de Coleman, la stratégie p-adique de majoration du cardinal de $C(k)$ fait voir le jour à un résultat d'uniformité par Stoll [Sto17] qui traite des courbes hyperelliptiques. Cette attaque a été généralisée depuis à toutes les courbes (pour $g \geq 3$) dans [KRZ16] par Katz, Rabinoff, Zureick-Brown, dont voici le résultat :

Théorème 4.2.5. *Soit $d \geq 1$ et $g \geq 3$ des entiers. Il existe une constante $c_{16}(g,d) > 0$ telle que pour tout corps de nombres k de degré d et pour toute courbe projective lisse C définie sur k telle que le rang $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)$ de la jacobienne $\mathrm{Jac}(C)$ sur k vérifie $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k) \leq g-3$, on a $\#C(k) \leq c_{16}(g,d)$.*

Notons que la quantité $c_{16}(g,d)$ peut être explicitée, comme cela est proposé dans les textes [Sto17] et [KRZ16]. Comme dans tous les cas d'applications de la méthode Chabauty-Coleman, on s'attend à ce que la dépendance en le paramètre g soit polynomiale, voire quasi-linéaire. De plus, les techniques à la Chabauty permettent parfois de résoudre complètement des équations diophantiennes, voir par exemple [Sik13].

Remarque 4.2.6. Le théorème [KRZ16] pourra donc être vu comme un pas vers la conjecture 4.2.2, ou comme un pas vers les conjectures 4.2.3 ou 4.2.4. En effet la conjecture 4.2.3 (ou la conjecture 4.2.4) combinée à une inégalité du type $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k) \leq c_{17}(g)$ pour une constante $c_{17}(g) > 0$ ne dépendant que de g impliquent la conjecture 4.2.2 *restreinte aux courbes dont la jacobienne vérifie* $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k) \leq c_{17}(g)$ bien entendu.

Remarque 4.2.7. La conjecture 4.2.3 ou la conjecture 4.2.4 couplée à une borne uniforme sur le rang de la forme $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k) \leq c_{18}(g,k)$ implique bien entendu la conjecture 4.2.2. La question de savoir si le rang des variétés abéliennes de dimension fixée $g \geq 1$ sur un corps de nombre fixé k est borné uniformément est un problème encore largement ouvert. La majoration explicite donnée dans le corollaire 5.2.2 du Chapitre 5 est inconditionnelle, mais bien plus faible.

Nous allons montrer en détails dans ce texte qu'une conjecture de minoration de hauteur dans l'esprit Lang-Silverman implique aussi la conjecture 4.2.3, sans besoin d'hypothèse sur le rang. C'est une idée naturelle après la lecture de [deD97], qui traite cependant uniquement le cas des jacobiennes isogènes à des produits de courbes elliptiques (voir l'hypothèse $(*)$ page 110 de [deD97]). On traite le cas général ici en suivant le chemin euclidien tracé par Rémond dans ses articles [Rém00, Rém10], et en ajoutant comme ingrédient la minoration Lang-Silverman proposée plus bas. La déduction de la conjecture 4.2.3 s'obtient alors moyennant quelques efforts techniques supplémentaires.

On commence par formuler une conjecture du type Lang-Silverman, proposant une minoration uniforme de la hauteur d'un point k-rationnel d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres k.

Conjecture 4.2.8. *Soit $g \geq 1$ un entier. Pour tout corps de nombres k, il existe deux nombres $c_{19} = c_{19}(g,k) > 0$ et $c_{20} = c_{20}(g,k) > 0$ tels que pour toute variété abélienne A/k de dimension g et pour tout fibré en droites ample et symétrique L sur A, pour tout point $P \in A(k)$,*

- *ou bien il existe une sous-variété abélienne $B \subset A$, $B \neq A$, de degré $\deg_L(B) \leq c_{19} \deg_L(A)$ et telle que l'ordre de P modulo B est borné par c_{19},*
- *ou bien on a $\mathrm{End}(A)\cdot P$ est Zariski dense et*

$$\widehat{h}_{A,L}(P) \geq c_{20} \max\left\{h_F(A/k),\, 1\right\},$$

où $\widehat{h}_{A,L}(.)$ est la hauteur de Néron-Tate associée à L et $h_F(A/k)$ est la hauteur de Faltings de la variété A/k, et les deux cas s'excluent mutuellement.

Cette forme forte de la conjecture est motivée par le théorème 1.4 page 511 de [Dav93] et les théorèmes 1.8 et 1.13 de [Paz13b]. Des exemples de familles de jacobiennes de courbes vérifiant cette conjecture sont donnés dans [Mas93] et [Paz13b] (exemples valables aussi pour cette forme forte, puisque les jacobiennes associées sont simples).

C'est un énoncé ambitieux. Il implique notamment une borne uniforme sur le nombre de points de torsion des variétés abéliennes de dimension g fixée sur un corps de nombres k : la *conjecture de torsion forte*. Voyons comment obtenir cette conséquence avant de débuter le travail.

Proposition 4.2.9. *Supposons vraie la conjecture 4.2.8. Alors pour tout $g \geq 1$, pour tout corps de nombres k il existe une quantité $c_{21}(g,k) > 0$ telle que pour toute variété abélienne A de dimension g et définie sur k, on a la majoration $\#A(k)_{tors} \leq c_{21}(g,k)$, de plus la quantité $c_{21}(g,k)$ est exprimable explicitement en termes des quantités apparaissant dans la conjecture 4.2.8.*

Démonstration. Posons tout d'abord $\overline{c_{19}} = \max_{1\leq i\leq g} c_{19}(i,k)$, qui est une quantité plus grande que 1. Soit P un point de torsion dans $A(k)$. Comme sa hauteur de Néron-Tate est nulle, il ne peut pas tomber dans le second cas de l'alternative fournie par la conjecture 4.2.8. Il existe donc une sous-variété abélienne stricte B_1 telle que l'ordre de P modulo B_1 est borné par c_{19}. Donc il existe un entier $1 \leq N_1 \leq c_{19}$ tel que $[N_1]P \in B_1$, et *a fortiori* $N_1 \leq \overline{c_{19}}$. On applique à présent la conjecture 4.2.8 à $P_1 = [N_1]P \in B_1(k)$ sachant que B_1 est une variété abélienne de dimension strictement inférieure à la dimension de A. Comme P_1 est lui aussi un point de torsion, sa hauteur est nulle et il doit tomber aussi dans le premier cas. On obtient ainsi l'existence de B_2 stricte dans B_1 et de $N_2 \leq \overline{c_{19}}$ tel que $P_2 = [N_2]P_1 \in B_2(k)_{\mathrm{tors}}$. Comme la dimension des B_i est une suite strictement décroissante, nous avons la garantie de trouver un indice $i_0 \leq g$ tel que $B_{i_0} = 0$, donc $P_{i_0} = 0$ et ainsi $[N_{i_0} \cdots N_2 N_1]P = 0$. L'ordre de $P \in A(k)_{\mathrm{tors}}$ est donc borné par $\overline{c_{19}}^g$ dans tous les cas.

Si l'exposant du groupe $A(k)_{\mathrm{tors}}$ est borné par un nombre M, alors son cardinal est borné par M^{2g}.

On conclut donc que la quantité $c_{21}(g,k) = \overline{c_{19}}^{2g^2}$ convient.

□

L'utilisation d'une minoration en famille de la hauteur canonique sur les variétés jacobiennes fournit alors le résultat suivant.

Théorème 4.2.10. *Supposons vraie la conjecture* 4.2.8. *Soit k un corps de nombres et soit $g \geq 2$ un entier. Il existe une constante $c_{22} = c_{22}(g,k) > 0$ telle que pour toute courbe C de genre g définie sur k,*

$$\#C(k) \leq c_{22}^{\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)+1},$$

où $\mathrm{r}(\mathrm{Jac}(C)/k)$ *désigne le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur k. Toute quantité c_{22} majorant*

$$(2g)^{42g^4} \max\left\{c_{19}^{10g^3}, \frac{1}{c_{20}}\right\},$$

convient, avec $c_{19} = c_{19}(g,k) \geq 1$ et $c_{20} = c_{20}(g,k) > 0$ données dans la conjecture 4.2.8.

Ce résultat fournit donc une généralisation (conditionnelle) de la Proposition 6 page 111 de [deD97].

4.3 Calabi-Yau et points rationnels

On s'intéresse dans ce chapitre aux variétés de Calabi-Yau de dimension 3, qui sont par définition des variétés lisses, géométriquement connexes, vérifiant $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ et $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Afin de mieux identifier quel cas on étudie ici, voici un tableau présentant une classification des variétés algébriques de dimension 3. On notera $\kappa(X)$ la dimension de Kodaira de X.

$\kappa(X)$	*Genre géom.*	*Irrégularité* $\dim H^1(\mathcal{O}_X)$	*Exemples*	*Zariski densité potentielle*
3			type général	Non conjectural
2			fibration au-dessus d'une surface, fibre générale courbe elliptique	Divers cas
1			fibration au-dessus d'une courbe, fibre générale surface avec $\kappa = 0$	Divers cas
0	1	3	variété abélienne	Oui
	0	2	fibré au-dessus d'une surface, fibres courbes elliptiques	Oui conjectural
	1 ou 1	1	fibré au-dessus d'une courbe elliptique, fibres surfaces avec $\kappa = 0$	Oui conjectural
	0 ou 1	0	**Calabi-Yau**	**Objet de l'étude**
$-\infty$	0	≥ 1	variétées réglées	Divers cas
$-\infty$	0	0	variétés rationnelles, Fano, autres	Divers cas

Une question naturelle, notamment posée par Tschinkel (Exposé ICM 2006 [Tsc06], suivant le Problem 3.5) au sujet de ces variétés est la suivante. Soit X une telle variété de Calabi-Yau définie sur un corps de nombres k. Existe-t-il une extension finie k'/k telle que $X(k')$ est Zariski dense dans X ? Si oui, on dira alors de X qu'elle vérifie la propriété de Zariski densité potentielle de ses points rationnels.

On montre le théorème suivant, qui assure que dans le cas où la variété de Calabi-Yau est de dimension 3 et admet deux fibrations indépendantes dont une en surfaces abéliennes, elle vérifie cette propriété de Zariski densité potentielle.

Théorème 4.3.1. *Soit X une variété de Calabi-Yau de dimension 3 définie sur un corps de nombres et admettant une fibration en surfaces abéliennes $f : X \to \mathbb{P}^1$ et une section. On suppose que X possède un diviseur D effectif, mobile*[1]*, non gros*[2]*, tel que la fibration abélienne ne se factorise pas (birationnellement) par la fibration d'Iitaka de D. Alors il existe une extension finie k'/k telle que $X(k')$ est Zariski dense dans X.*

La preuve repose sur des arguments du Minimal Model Program et fait notamment usage d'une propriété de log-abondance en dimension 3, un théorème difficile de Keel, Matsuki et McKernan [KMM94]. On obtient en corollaire de ce théorème les premiers exemples de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 satisfaisant la propriété de Zariski densité potentielle. Notons tout d'abord $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ les formes coordonnées de $\mathbb{P}^5$ et définissons $f_0 = x_0^3 + x_2^3 + x_4^3$, $f_1 = x_1^2 x_4 + x_3^2 x_0 + x_5^2 x_2$, $f_2 = x_1 x_2 x_3 + x_3 x_4 x_5 + x_5 x_0 x_1$ et $f_3 = x_0 x_2 x_4$. Soit σ et τ des applications définies par $\sigma(x_i) = x_{i-1}$ et $\tau(x_i) = e^{-\frac{2\pi i}{5}} x_i$, pour tout indice i entier modulo 5. Notons enfin $H' =< \sigma^2, \tau^2 >$. Alors $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3))^{H'}$ est engendré par $f_0, f_1, f_2, f_3, \sigma f_0, \sigma f_1, \sigma f_2, \sigma f_3$.

Corollaire 4.3.2. *(Corollaire 7.3 page 10014 de [BHPT17]) Soit $V_6 \subset \mathbb{P}^5$ la sous-variété définie par l'annulation d'une forme cubique générique de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3))^{H'}$ et de son image par σ. Alors V_6 est une variété de dimension 3 possédant 72 points doubles ordinaires. Il existe une variété lisse V_6^1, obtenue par résolution des singularités, qui est une variété de Calabi-Yau fibrée en surfaces abéliennes polarisées de type $(1, 6)$. Elle satisfait la propriété de Zariski densité potentielle.*

Démonstration. L'essentiel de la construction est donné dans la preuve du théorème 4.10 page 194 de Gross et Popescu [GrPo01]. On trouve la seconde fibration sur V_6^1 en appliquant deux *flops*, ceci fournit une fibration en surfaces abéliennes polarisées de type $(2, 6)$. Les degrés respectifs des polarisations assurent que les fibrations sont indépendantes et ceci permet d'appliquer le théorème 4.3.1. Rappelons qu'un flop relativement à un diviseur D d'une variété de dimension 3 est une application birationnelle partant de X et transformant une courbe C satisfaisant $K_X \cdot C = 0$ et $D \cdot C < 0$ en une courbe C' satisfaisant $K_X \cdot C' = 0$ et $D \cdot C' > 0$. □

1. *movable* en anglais.
2. *non-big* en anglais.

Chapitre 5

Rangs et régulateurs de Mordell-Weil

Ce chapitre contient des résultats concernant le groupe de Mordell-Weil des variétés abéliennes sur les corps de nombres. Il est divisé en trois sous-thèmes. La première partie, retraçant une collaboration avec Henri Cohen, expose une technique de 3-descente explicite sur les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ permettant de calculer exactement la valeur du rang pour certaines familles de telles courbes. Le seconde partie concerne les variétés abéliennes en général et contient une majoration du rang linéaire en la hauteur de la variété. Dans la troisième partie on s'intéresse au régulateur des groupes de Mordell-Weil : en comparant avec le régulateur des corps des nombres, on propose une propriété de Northcott obtenue comme conséquence assez directe d'une minoration à la Lang-Silverman.

Travaux présentés

Elementary 3*-descent with a* 3*-isogeny,* article publié à Acta Arithmetica, 140.4, p. 369–404, 2009, en collaboration avec Henri Cohen.

Heights and regulators of number fields and elliptic curves, article publié aux Publ. Math. Besançon, 2014/2, 2014, p. 47-62.

Erratum and addendum to "Heights and regulators of number fields and elliptic curves", article publié aux Publ. Math. Besançon, 2016, p. 81–83.

Northcott property for the regulators of number fields and abelian varieties, article publié aux Oberwolfach Reports, 2016, volume 13.

Heights, ranks and regulators of abelian varieties, prépublication sur https ://arxiv.org/abs/1506.05165.

5.1 Descente et calculs de rangs sur les courbes elliptiques

Soit E/k une courbe elliptique sur un corps de nombres k et soit $n \geq 2$ une entier. Un caclul de cohomologie galoisienne appliqué à $[n] : E \to E$ nous permet d'écrire les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E(k)/nE(k) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^1(k,E[n]) \arrow[r] \arrow[d, "\prod_v \mathrm{res}_v"] \arrow[dr, "\varphi"] & H^1(k,E)[n] \arrow[r] \arrow[d, "\prod_v \mathrm{res}_v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_v E(k_v)/nE(k_v) \arrow[r, "\prod_v \delta_v"] & \prod_v H^1(k_v,E[n]) \arrow[r] & \prod_v H^1(k_v,E)[n] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On appelle alors *n-groupe de Selmer*

$$\mathrm{Sel}^{(\mathrm{n})}(k,E) := \mathrm{Ker}\Big(\varphi : H^1(k,E[n]) \longrightarrow \prod_v H^1(k_v,E)[n]\Big).$$

Le *groupe de Tate–Shafarevich* est quant à lui

$$\text{Ш}(k,E) := \mathrm{Ker}\Big(H^1(k,E) \longrightarrow \prod_v H^1(k_v,E)\Big).$$

On déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow E(k)/nE(k) \longrightarrow \mathrm{Sel}^{(\mathrm{n})}(k,E) \longrightarrow \text{Ш}(k,E)[n] \longrightarrow 0\ ,$$

où chaque terme est un groupe fini et où

$$\Big|\mathrm{Sel}^{(\mathrm{n})}(k,E)\Big| = \Big|E(k)/nE(k)\Big|\,\Big|\text{Ш}(k,E)[n]\Big|\ ,$$

ce qui implique

$$n^{\mathrm{r}(E/k)} = \frac{\Big|\mathrm{Sel}^{(\mathrm{n})}(k,E)\Big|}{\Big|E(k)_{\mathrm{tors}}/nE(k)_{\mathrm{tors}}\Big|\,\Big|\text{Ш}(k,E)[n]\Big|}\ .$$

Pour calculer le rang de Mordell-Weil $\mathrm{r}(E/k)$, il suffit donc de calculer le n-groupe de Selmer et la n-partie du groupe de Tate–Shafarevich. C'est une entreprise difficile en général, mais faisable dans certains cas, par exemple lorsque la courbe possède une isogénie rationnelle non triviale et de petit degré. On pourra consulter [CFOSS08, CFOSS09] et leurs références pour plus de détails.

Afin d'estimer le rang d'une courbe elliptique sur $k = \mathbb{Q}$, on met en place une 3-descente explicite. La méthode repose sur l'existence d'une isogénie rationnelle de degré trois. On suppose donc que la courbe admet un sous-groupe rationnel d'ordre 3, ce qui autorise à travailler sur un modèle affine de la forme $y^2 = x^3 + D(ax+b)^2$. On exhibe alors des espaces principaux homogènes (en l'occurence, des formes cubiques explicites) comme éléments du groupe de Selmer associé. La descente permet donc de transformer le problème consistant à *trouver une solution non triviale à l'équation de départ* en un problème consistant à *prouver que des formes cubiques associées admettent (ou non) des solutions locales en toutes places.*

Afin d'illustrer les bienfaits de ces calculs, on extrait de l'article [CoPa09] le résultat suivant.

Théorème 5.1.1. *Soit E une courbe elliptique de modèle affine $y^2 = x^3 + p^2$, où p est un nombre premier congru à 2 modulo 9. Alors* $\mathrm{r}(E/\mathbb{Q}) = 1$.

Soit E une courbe elliptique de modèle affine $y^2 = x^3 + p^2$, où p est un nombre premier congru à 5 modulo 9. Alors $\mathrm{r}(E/\mathbb{Q}) = 0$.

5.2 Majoration des rangs de Mordell-Weil

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres k. Le rang du groupe de Mordell-Weil $A(k)$ reste encore aujourd'hui une quantité difficile d'accès. On obtient un résultat inconditionnel de majoration de ce rang comme corollaire du résultat suivant.

Théorème 5.2.1. *Soit $g \geq 1$ un entier naturel. Soit k un corps de nombres de degré d. Il existe deux réels $c_{23} = c_{23}(g) > 0$, $c_{24} = c_{24}(g)$, tels que pour toute variété abélienne de dimension g, définie sur k, on a*

$$h(A/k) \geq c_{23}\frac{1}{d}\log N^0_{A/k} + c_{24}$$

où $N^0_{A/k}$ est le produit des normes des premiers de k de mauvaise réduction pour A. On pourra de plus prendre les valeurs explicites $c_{23} = (12g)^{-12g^{12g^{4g}}}$ et $c_{24} = -1/c_{23}$.

Dans le cas où A est la jacobienne d'une courbe, la formule de Noether arithmétique permet de prouver ce résultat en minorant l'invariant delta de Faltings, ce qui est possible via [JoKr09] ou [Wil16]. La preuve du cas général proposée dans [Paz16b] est une réduction au cas des variétés jacobiennes qui repose sur un théorème de Bertini avec hauteurs contrôlées, lequel est obtenu dans [Paz16b] en utilisant des travaux de Rémond. L'inégalité (3.1) est utilisée deux fois dans cette preuve. Notons cependant que Hindry et Pacheco ont donné parallèlement une inégalité similaire (faisant intervenir les nombres de composantes du modèle de Néron) dans [HiPa16], sans constantes explicites, et que Wagener [Wag16] a proposé par la suite une preuve de ce résultat dans sa thèse avec des constantes plus raisonnables.

On obtient alors l'inégalité suivante comme corollaire du théorème 5.2.1 et du théorème 5.1 de [Rém10] page 775 (qui est un raffinement d'un résultat précédent de Ooe et Top majorant le rang par la taille des mauvais premiers).

Corollaire 5.2.2. *Soit A une variété abélienne de dimension g définie sur un corps de nombres k de degré d et de discriminant Δ_k. Soit $\mathrm{r}(A/k)$ le rang de Mordell-Weil de $A(k)$. Il existe un réel $c_{25} = c_{25}(d,g) > 0$ tel que*

$$\mathrm{r}(A/k) \leq c_{25}\max\{1, h(A/k), \log|\Delta_k|\},$$

et on pourra prendre $c_{25} = (12g)^{12g^{12g^{4g}}}d^3$.

5.3 Régulateurs

Comparer des résultats valables pour les corps de nombres et des résultats concernant les variétés abéliennes sur les corps globaux a été fécond en plusieurs occasions en théorie des nombres. C'est la philosophie de ce paragraphe. Un exemple récent est le travail [HiPa16], où une formule conjecturale à la Brauer-Siegel est proposée pour les variétés abéliennes.

Dans le même esprit, on cherche dans cette partie à montrer qu'on peut espérer voir le régulateur des variétés abéliennes sur les corps de nombres jouir d'une propriété de Northcott adaptée. La première étape est de comprendre comment le régulateur des corps de nombres peut nous offrir l'énoncé de finitude suivant.

Rappelons qu'un corps de nombres k est dit CM s'il est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel F.

Théorème 5.3.1. *Il existe au plus un nombre fini de corps de nombres non-CM avec régulateur borné.*

La preuve est la suivante : si k désigne un corps de nombres de régulateur R_k, de discriminant Δ_k et de degré d, on utilise conjointement deux inégalités, la première, issue de [Sil84, Fri89], du type $R_k \geq c_{26}(d)(\log|\Delta_k|)^s$, où $c_{26}(d) > 0$ et où on montre que l'exposant $s \geq 0$ est nul si et seulement si k est un corps CM. La seconde, issue de [Fri89] (voir aussi Corollaire 1.10 page 150 de [AmDa99]), étant $R_k \geq c_{27}d$, où $c_{27} > 0$ est universelle. La conclusion s'obtient en appliquant le théorème d'Hermite assurant la finitude des familles de corps de nombres à discriminant borné.

On cherche à imiter cette stratégie pour l'étude du régulateur du groupe de Mordell-Weil des variétés abéliennes. On sera donc intéressé par établir des inégalités du type

$$\mathrm{Reg}(A/k) \geq c_{28}\, h(A)^{\alpha}, \tag{5.1}$$

où $c_{28} > 0$ ne dépend que de $\mathrm{r}(A/k)$, du corps de base k et de la dimension $g = \dim(A)$, et où $\alpha \geq 0$ est nul si et seulement si $A(k)$ n'est pas Zariski dense dans A, et

$$\mathrm{Reg}(A/k) \geq c_{29}\, \mathrm{r}(A/k), \tag{5.2}$$

où $c_{29} > 0$ ne dépend que de k et de g (mais pas du rang bien entendu). Ces inégalités correspondent à ce que ce tableau comparatif suggère [1] :

	Corps de nombres k		Variété abélienne A/k	
fonction zêta	$\zeta_k(s)$	$\leftrightarrow$	$L(A,s)$	fonction L
unités	U_k	$\leftrightarrow$	$A(k)$	points rationnels
rang	r_k	$\leftrightarrow$	$\mathrm{r}(A/k)$	rang
torsion	$(U_k)_{\mathrm{tors}}$	$\leftrightarrow$	$(A \times \hat{A})(k)_{\mathrm{tors}}$	torsion de A et duale $\hat{A}$
régulateur	R_k	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Reg}(A/k)$	régulateur
nombres de classes	h_k	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Card}(Ш(A/k))$	cardinal de Ш
log du discriminant	$\log|D_K|$	$\leftrightarrow$	$h(A)$	hauteur de Faltings
degré	d	$\leftrightarrow$	g	dimension
corps CM	$s = 0$	$\leftrightarrow$	$\alpha = 0$	$A(k)$ non Zariski dense
corps non CM	$s > 0$	$\leftrightarrow$	$\alpha > 0$	$A(k)$ Zariski dense

Malheureusement les inégalités (5.1) et (5.2) semblent encore hors de portée aujourd'hui. On obtient tout de même les résultats suivant, conditionnellement à la conjecture 4.2.8.

Théorème 5.3.2. *Supposons vraie la conjecture 4.2.8. L'ensemble des classes de $\overline{\mathbb{Q}}$- isomorphismes de variétés abéliennes simples A, munies d'un fibré ample et symétrique L, définies sur un corps de nombres k, de dimension g de rang* $\mathrm{r}(A/k)$ *non nul et majoré, et* $\mathrm{Reg}_L(A/k)$ *majoré est fini.*

1. En observant le fait important que $r_k = r_1 + r_2 - 1$ et $d = r_1 + 2r_2$ où r_1 est le nombre de plongements réels de k et $2r_2$ le nombre de plongements complexes.

Théorème 5.3.3. *Supposons vraie la conjecture 4.2.8. L'ensemble des classes de $\overline{\mathbb{Q}}$- isomorphismes de variétés abéliennes principalement polarisées A, munies d'un fibré ample et symétrique L, définies sur un corps de nombres k, de dimension g, de rang $\mathrm{r}(A/k)$ majoré, avec $A(k)$ Zariski dense dans A et $\mathrm{Reg}_L(A/k)$ majoré est fini.*

Comme expliqué dans [Paz16a], si on se concentre sur le cas $g = 1$ on peut remplacer la conjecture 4.2.8 par la conjecture ABC dans les théorèmes 5.3.2 et 5.3.3.

Chapitre 6

Encadrement doctoral

Ce chapitre présente brièvement les recherches effectuées jusqu'ici par mes étudiants en thèse de doctorat.

6.1 Bruno Winckler

Encadré en collaboration avec Pascal Autissier (Bordeaux), Winckler a travaillé de 2012 à 2015 sur le problème de Lehmer elliptique et le théorème de Chebotarev explicite. Il signe une thèse intitulée *Problèmes de minoration de type Lehmer sur les courbes elliptiques CM*, soutenue le 20 novembre 2015 à Bordeaux. Son travail a donné lieu à deux prépublications, *Problème de Lehmer sur les courbes elliptiques à multiplications complexes*, accessible via https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01493577v1, accepté pour publication chez Acta Arithmetica, et *Théorème de Chebotarev explicite*, accessible via https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907410v1.

6.2 Martin Djukanovic

Encadré en collaboration avec Robin de Jong (Leiden), Djukanovic a travaillé de 2012 à 2017 sur des questions de minoration de hauteur sur les surfaces abéliennes, et sur des isogénies explicites entre jacobiennes de courbes de genre 2 et produits de courbes elliptiques. Il a soutenu sa thèse, intitulée *Split jacobians and lower bounds on heights*, le 1er novembre dernier à Leiden.

6.3 Raymond van Bommel

Encadré en collaboration avec David Holmes (Leiden), van Bommel travaille depuis 2014 sur des questions d'ordinarité de courbes hyperelliptiques et sur des calculs explicites autour de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Il signe une prépublication intitulée *Inverse Galois problems for ordinary curves*, accessible via https ://arxiv.org/abs/1704.07608, acceptée pour publication chez International Journal of Number Theory.

6.4 Riccardo Pengo

Encadré en collaboration avec Ian Kiming (Copenhague), Pengo travaille depuis la rentrée de septembre 2017 sur des conjectures de Boyd reliant mesures de Mahler et valeurs spéciales de fonctions L.

Bibliographie

[AmDa99] Amoroso, F. et David, S., *Problème de Lehmer en dimension supérieure.* J. reine angew. Math. **513** (1999), 145–179.

[And98] André, Y., *Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire.* J. reine angew. Math. **505** (1998), 203–208.

[Aut13] Autissier, P., *Un lemme matriciel effectif.* Math. Z. **273** (2013), 355–361.

[BMZ13] Bilu, Yu., Masser, D. et Zannier, U., *An effective Theorem of André for CM-points on a plane curve.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **154.1** (2013), 145–152.

[BHPT17] Bogomolov, F., Halle, L., Pazuki, F. et Tanimoto, S., *Abelian Calabi-Yau threefolds : Néron models dans rational points.* Math. Research Let. (2017), à paraître.

[BrSu10] Bröker, R. et Sutherland, A.V., *An explicit height bound for the classical modular polynomial.* Ramanujan. J. **22.3** (2010), 293–313.

[CHM97] Caporaso, L., Harris, J. et Mazur, B., *Uniformity of rational points.* J. Amer. Math. Soc. **10.1** (1997), 1–35.

[Coh84] Cohen, P., *On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function.* Math. Proc. of the Cambridge Philo. Soc. **95** (1984), 389–402.

[CoPa09] Cohen, H. et Pazuki, F., *Elementary* 3*-descent with a* 3*-isogeny.* Acta Arith. **140.4** (2009), 369–404.

[Col93] Colmez, P., *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe.* Ann. of Math. (2) **138.3** (1993), 625–683.

[CFOSS08] Cremona, J. E., Fisher, T. A., O'Neil, C., Simon, D. et Stoll, M., *Explicit n-descent on elliptic curves. I. Algebra.* J. reine angew. Math., **615** (2008), 121–155.

[CFOSS09] Cremona, J. E., Fisher, T. A., O'Neil, C., Simon, D. et Stoll, M., *Explicit n-descent on elliptic curves. II. Geometry.* J. reine angew. Math., **632** (2009), 63–84.

[Dav93] David, S., *Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes.* Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 509–544.

[DNP07] David, S., Nakamaye, M. et Philippon, P., *Bornes uniformes pour le nombre de points rationnels de certaines courbes.* Diophantine geometry, CRM Series **4** Ed. Norm., Pisa (2007), 143–164.

[deD97] de Diego, T., *Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2.* J. Number Theory **67** (1997), 85–114.

[Fal83] Faltings, G., *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern.* Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[Fri89] Friedman, E., *Analytic formulas for the regulator of a number field.* Invent. Math. **98** (1989), 599–622.

[GTZ11] Ghioca, D.,Tucker, T. et Zhang, S.-W., *Towards a dynamical Manin-Mumford conjecture.* Int. Math. Res. Not. **22** (2011), 5109–5122.

[Gra01] Graftieaux, P., *Formal groups and the isogeny theorem.* Duke Math. J. **106.1** (2001), 81–121.

[GrPo01] Gross, M. et Popescu, S., *Calabi-Yau threefolds and moduli of abelian surfaces I*, Compos. Math. **127** (2001), 169–228.

[Gro72] Grothendieck, A., *Modèles de Néron et monodromie*, exp. IX in SGA 7, Lec. Notes in Math. **288**, Springer-Verlag (1972).

[HaPa17] Habegger, P. et Pazuki, F., *Bad reduction of curves with CM jacobians*, Compos. Math. **153.12** (2017), 2534–2576.

[HiPa16] Hindry, M. et Pacheco, A., *An analogue of the Brauer-Siegel theorem for abelian varieties in positive characteristic*, Mosc. Math. J. **16** (2016), 45–93.

[JoKr09] Jorgenson, J. et Kramer, J., *Bounds on Faltings delta function through covers*, Ann. of Math. (2) **170.1** (2009), 1–43.

[KRZ16] Katz, E., Rabinoff, J. et Zureick-Brown, D., *Uniform bounds for the number of rational points on curves of small Mordell–Weil rank.* Duke Math. J. **165.16** (2016), 3189–3240.

[KMM94] Keel, S., Matsuki, K. et McKernan, J., *Log abundance theorem for threefolds*, Duke Math. J. **75.1** (1994), 99–119.

[Mas93] Masser, D., *Large period matrix and a conjecture of Lang.* Séminaire de théorie des nombres, Paris 1991–1992, Progr. Math. **116** (1993), 153–177.

[Mas87] Masser, D. W., *Small values of heights on families of abelian varieties.* Diophantine approximation and transcendence theory, Lecture Notes in Math. **1290** (1987), 109–148.

[Maz00] Mazur, B., *Abelian varieties and the Mordell-Lang conjecture.* Model theory, algebra, and geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **39** Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 199–227.

[MB] Moret–Bailly, L., *Problèmes de Skolem sur les champs algébriques.* Compos. Math. **125.1** (2001), 1–30.

[Obu13] Obus, A., *On Colmez's product formula for periods of CM-abelian varieties.* Math. Ann. **356.2** (2013), 401–418.

[Paz10a] Pazuki, F., *Remarques sur une conjecture de Lang.* Jour. Th. Nombres Bordeaux **22.1** (2010), 161–179.

[Paz10b] Pazuki, F., *Zhang's conjecture and squares of abelian surfaces.* Compte Rendus Acad. Scien. Paris, Ser. 1, **348** (2010), 483–486.

[Paz12] Pazuki, F., *Theta height and Faltings height.* Bull. Soc. Math. France **140.1** (2012), 19–49.

[Paz13a] Pazuki, F., *Polarized morphisms between abelian varieties.* Inter. J. Number Theory **9.02** (2013), 405–411.

[Paz13b] Pazuki, F., *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les surfaces abéliennes.* Manusc. Math. **142** (2013), 61–99.

[Paz14] Pazuki, F., *Heights and regulators of number fields and elliptic curves.* Publ. Math. Besançon **2014/2** (2014), 47–62.

[Paz16a] Pazuki, F., *Northcott property for the regulators of abelian varieties.* Oberwolfach Reports **13.2**, *Diophantische Approximationen*, organisé par Yann Bugeaud, Philipp Habegger et Umberto Zannier (2016).

[Paz16b] Pazuki, F., *Heights, ranks and regulators of abelian varieties.* prépublication arXiv.org : 1506.05165 (2016).

[Paz16c] Pazuki, F., *Modular invariants and isogenies.* prépublication arXiv.org : 1611.01094 (2016).

[Ray85] Raynaud, M., *Hauteurs et isogénies*, Astérisque **127** (1985), 199–234.

[Rém00] Rémond, G., *Décompte dans une conjecture de Lang.* Invent. Math. **142** (2000), 513–545.

[Rém10] Rémond, G., *Nombre de points rationnels des courbes.* Proc. Lond. Math. Soc. **101.3** (2010), 759–794.

[SeTa68] Serre, J.-P. et Tate, J., *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Sil84] Silverman, J. H., *An inequality relating the regulator and the discriminant of a number field.* Journal of Number Theory **19.3** (1984), 437–442.

[Sik13] Siksek, S., *Explicit Chabauty over number fields.* Alg. and Number Theory **7.4** (2013), 765–793.

[Sto17] Stoll, M., *Uniform bounds for the number of rational points on hyperelliptic curves of small Mordell–Weil rank.* to appear in J. Europ. Math. Soc. (2017).

[Tsc06] Tschinkel, Yu., *Geometry over non-closed fields.* ICM talk available from http ://www.cims.nyu.edu/∼ tschinke/publications.html (2006), 13 pages.

[Wag16] Wagener, B., *Géométrie arithmétique sur les variétés abéliennes : minoration explicite de la hauteur de Faltings et borne sur la torsion.* Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques de Jussieu (2016).

[Wil16] Wilms, R., *New explicit formulas for Faltings delta invariant.* prépublication arXiv :1605.00847 (2016).

[Zha05] Zhang, S.-W., *Equidistribution of CM-points on quaternion Shimura varieties*, Int. Math. Res. Not. **59** (2005), 3657–3689.

[Zha06] Zhang, S.-W., *Distributions in algebraic dynamics*, Survey in Differential Geometry, vol. 10 International Press (2006), 381–430.