Introduction aux mathématiques japonaises

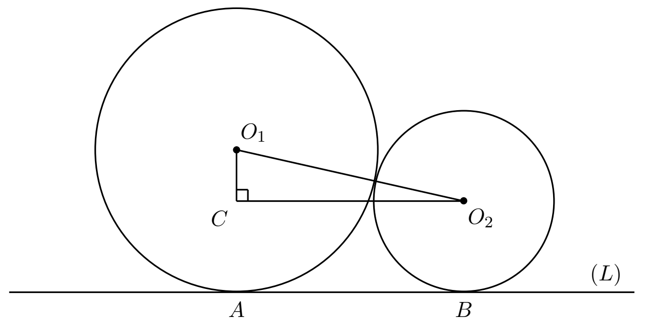
MATHIEU LAMARQUE
Maître de stage : Fabien Pazuki
IMB, Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France

1 Introduction

Durant la majorité de l'ère Edo (1603-1867), le Japon fut complètement isolé du monde occidental. Les ouvrages sur les mathématiques étaient très rares. C'est pourquoi les problèmes de géométrie euclidienne étaient exposés sur des panneaux en bois, aux entrées de temples ou de tombeaux bouddhistes ou shintoïstes. Toute personne, allant du simple fermier au samouraï, pouvait proposer ou résoudre un problème.
On pourra consulter en références les ouvrages suivants :
- Sacred Mathematics : Japanese Temple Geometry
de Fukugawa Hidetoshi et de Tony Rothman.
- Sangaku : Le mystère des énigmes géométriques japonaises
de Géry Huvent.

2 Quelques problèmes simples

Les cercles $O_1(r_1)$ et $O_2(r_2)$ sont tangents entre eux extérieurement et tangents à la droite (L) respectivement en A et en B. Montrez que $AB^2 = 4r_1r_2$.

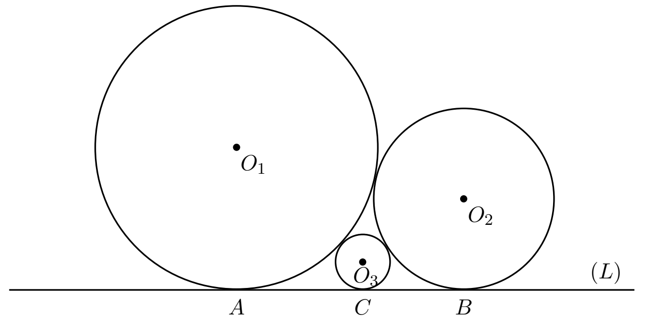


Soit C le projeté orthogonal de O_2 sur (AO_1). Le triangle O_1O_2C est rectangle en C donc on a la relation :

$$O_1C^2 + O_2C^2 = O_1O_2^2.$$

Or $O_1C = |O_1A - O_2B| = |r_1 - r_2|$, $O_2C = AB$ et $O_1O_2 = r_1 + r_2$,
donc $(r_1 + r_2)^2 = AB^2 + (r_1 - r_2)^2$,
d'où $AB^2 = 4r_1r_2$.

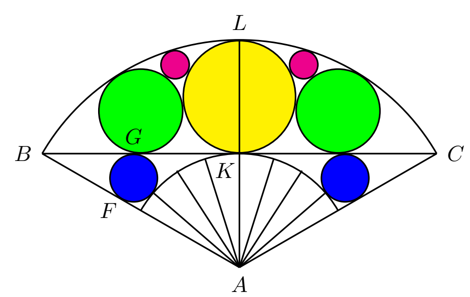
Un cercle $O_3(r_3)$ est tangent à la droite (L) et aux cercles décrits dans le problème 1. Montrez que : $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$.



L'égalité recherchée est équivalente à : $r_3 = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2+2\sqrt{r_1r_2}}$.
On note C le point de tangence entre $O_3(r_3)$ et (L).
On a : $AB = AC + BC$ donc $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC * BC$,
or d'après le problème 1 on a $AB^2 = 4r_1r_2$, $AC^2 = 4r_1r_3$
et $BC^2 = 4r_2r_3$, donc on a : $r_1r_2 = r_1r_3 + r_2r_3 + 2r_3\sqrt{r_1r_2}$,
d'où : $r_3 = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2+2\sqrt{r_1r_2}}$.

3 Un problème un peu plus complexe

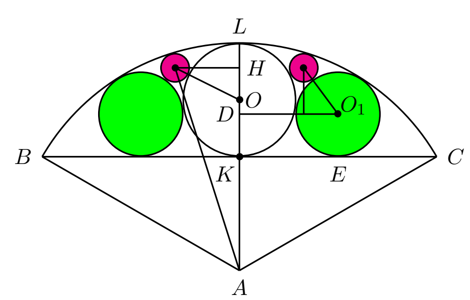
L'éventail est ouvert au deux tiers. Que vaut le rapport r/R dans le dessin suivant ?



Comme $[BC]$ est une corde du cercle de centre A et de rayon AB, on a : $BC = 2AB\sin(\frac{\pi}{3}) = AB\sqrt{3}$.
De plus $KL = AB - AK = AB - \sqrt{AB^2 - (\frac{BC}{2})^2} = \frac{1}{2}AB$
donc $AK = \frac{1}{2}AB$.

D'après le problème 1 on a $KG^2 = 4AK * R$,
donc $BF = BG = BK - KG = \frac{\sqrt{3}}{2}AB - 2\sqrt{\frac{AB*R}{2}}$.
On en déduit que $AF = AB - BF = \frac{2-\sqrt{3}}{2}AB + 2\sqrt{\frac{AB*R}{2}}$.
Or on sait que $AF^2 + R^2 = (AK + R)^2$,
donc on se ramène à une résolution d'équation du second degré :
$\frac{3-2\sqrt{3}}{2}AB + R + 2(2 - \sqrt{3})\sqrt{\frac{AB*R}{2}} = 0$, ce qui est équivalent à l'équation : $4R^2 + 4AB * R(6\sqrt{3} - 11) + (21 + 12\sqrt{3})AB^2 = 0$
Après résolution, on trouve que $R = \frac{21-12\sqrt{3}}{2}AB$.

On va maintenant chercher à exprimer r en fonction de AB pour pouvoir ensuite calculer le rapport r/R.



D'après le problème 1 on a : $EK = \sqrt{AB * O_1E}$.
Or $OO_1^2 = EK^2 + OG^2$,
d'où $(\frac{1}{4}AB + O_1E)^2 = AB * O_1E + (\frac{1}{4}AB - O_1E)^2$,
et donc $O_1E = \frac{3}{16}AB$.

Appelons le centre du cercle rouge O_2.
Tout d'abord, $AO_2 = AB - r$,
or, $O_2H^2 + AH^2 = AO_2^2$,
donc $O_2H^2 + (\frac{3}{4}AB + OH)^2 = (AB - r)^2$.
De plus, $O_2H^2 + OH^2 = (\frac{1}{4}AB + r)^2$.
Enfin, on a : $(EK - O_2H)^2 + (HO + OD)^2 = (\frac{3}{16}AB + r)^2$.
donc $(\frac{\sqrt{3}}{4}AB - FK)^2 + (HO + \frac{1}{16}AB)^2 = (\frac{3}{16}AB + r)^2$

Notons $a = O_2H$ et $b = HO$.
On a les équations suivantes :

$$a^2 + b^2 = (\tfrac{1}{4}AB + r)^2,$$
$$a^2 + (\tfrac{3}{4}AB + b)^2 = (AB - r)^2,$$
$$(\tfrac{\sqrt{3}}{4}AB - a)^2 + (\tfrac{1}{16}AB + b)^2 = (\tfrac{3}{16}AB + r)^2.$$

Les deux premières équations nous donnent : $b = \frac{AB}{4} - \frac{5}{3}r$.
En remplaçant b dans la première et la dernière équation, on trouve que : $a = \frac{\sqrt{3}}{6}AB - \frac{\sqrt{3}}{18}r$.
Enfin, on remplace a et b par les expressions trouvées précédemment dans la première équation et on obtient l'équation du second degré :

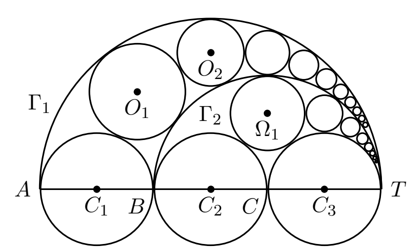
$$\frac{193}{108}r^2 - \frac{25}{18}AB * r + \frac{1}{12}AB^2 = 0.$$

On trouve $r = \frac{75-36\sqrt{3}}{193}AB$ ou $r = \frac{75+36\sqrt{3}}{193}AB$.
Mais comme $AB \geq r$, on en déduit que $r = \frac{75-36\sqrt{3}}{193}AB$.

Finalement, on trouve que : $\frac{r}{R} = \frac{2(75-36\sqrt{3})}{193(21-12\sqrt{3})} = \frac{62+32\sqrt{3}}{193}$.

4 Un problème difficile

Les points A, B, C et T sont alignés et $AB = BC = CT = 2r$. Les cercles $\Gamma_1(3r)$ et $\Gamma_2(2r)$ ont pour diamètres respectifs AT et BT. On considère la suite de cercles tangents $O_i(r_i)$ $(i = 1, 2, \dots)$ tels que $O_1(r_1)$ soit tangent à $C_1(r)$ de diamètre AB, à $\Gamma_1(3r)$ intérieurement et à $\Gamma_2(2r)$ extérieurement, et ainsi de suite. On utilise aussi les cercles $C_2(r)$ et $C_3(r)$ de diamètres respectifs BC et CT pour construire une autre chaine de cercles tangents $\Omega_i(t_i)$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ comme sur la figure suivante.
Prouvez que : $\frac{r_n}{3 - \frac{r_n}{t_n}} = \frac{r}{2}$.



Commençons par un rappel sur l'inversion géométrique. L'inversion géométrique est la transformation continue définie de la façon suivante :

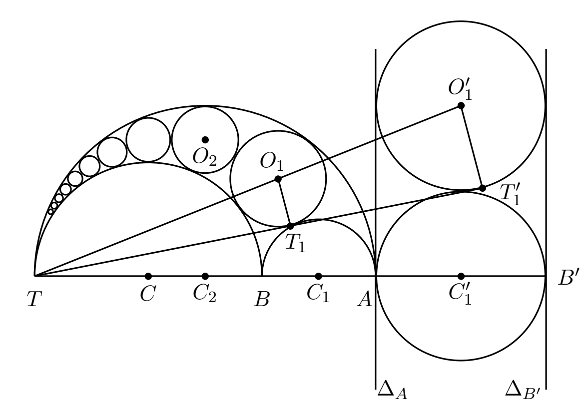
Soit k un nombre réel (appelé puissance) et O un point (appelé pôle), alors à tout point M distinct de O, on peut faire correspondre un point M' tel que O, M et M' soient alignés et $OM * OM' = k$.

L'ensemble des points invariants forment un cercle appelé cercle d'inversion de centre O et de rayon $\sqrt{|k|}$.
L'image d'une droite ne passant pas par le pôle d'inversion O est un cercle passant par O.

Toute droite passant par O est globalement invariante par une inversion de pôle O.

L'image d'un cercle (C) passant par le pôle d'inversion O est une droite parallèle à la tangente à ce cercle en O.
L'inverse d'un cercle (C) ne passant pas par O, par une inversion de pôle O et de puissance k, est un cercle, image de (C) par l'homothétie de centre O, de rapport k/p, où p désigne la puissance de O par rapport à (C).

Pour résoudre ce problème, nous allons d'abord chercher à exprimer de façon générale le rayon R_n du n-ième cercle de cette chaîne dite de Pappus.



On appelle (C_2) le cercle de centre C_2 et de diamètre TA (grand cercle), (C) et (C_1) respectivement les cercles de centre C et C_1 et de diamètre TB et BA (avec $TB > BA$). Enfin, on appelle (O_n) le n-ième cercle de la chaîne de Pappus ((O_0) est le cercle (C_1)).
On pose $TB = 2R_L$, $BA = 2R_R$ et $TA = 2R$. On note k le coefficient tel que : $R_R = k * R_L$, donc $R_L = \frac{R}{k+1}$ et $R_R = \frac{k*R}{k+1}$.

Soit I_T l'inversion de pôle T et de puissance $(2R)^2$.
Comme $TA = 2R$ le point A est invariant par I_T. De plus, (C_2) passe par T donc son image par I_T est une droite parallèle à la tangente à (C_2) en T, et cette droite passe par A donc, l'image de (C_2) par I_T est la tangente à (C_2) en A. Appelons cette image Δ_A.

De même, l'image de (C) est une droite parallèle à Δ_A passant par B', image de B par I_T. On appellera cette droite $\Delta_{B'}$.
Cherchons donc B' :
$I_T(B) = B' \Leftrightarrow TB{*}TB' = (2R)^2 \Leftrightarrow TB' = \frac{4R^2}{TB} = \frac{4R^2}{2R_L} = 2(k+1)R$.

Comme les cercles (C_1) et (O_n) sont tangents à (C_2), à (C) et ne passent pas par T, leurs images par I_T sont des cercles tangents à Δ_A et à $\Delta_{B'}$. On note ces cercles images (C'_1) et (O'_n).
On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ R'_n = \frac{B'A}{2}$. On a
$B'A = TB' - TA = 2(k+1)R - 2R = 2kR$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ R'_n = kR$.
De plus $TO_0 = (2 + k)R$.

On sait que : $O'_{n+1}O'_n = 2R'_n = 2R'_{n+1}$ donc on obtient par récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, $O'_0O'_n = 2nR'_n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux points de (O_n) tels que la droite passant par l'un de ces points et par T soit tangente à (O_n).
Notons T_n un de ces points, et T'_n son image par I_T.
Comme une inversion de cercle ne passant pas par le pôle d'inversion peut être associée à une homothétie de centre le pôle d'inversion, nous avons la relation suivante : $\frac{TT'_n}{TT_n} = \frac{R'_n}{R_n} = \frac{kR}{R_n}$.
De plus, comme T'_n est l'image de T_n par I_T, on a : $TT_n * TT_n = (2R)^2$.
Donc par produit, on obtient : $TT'^2_n = \frac{4kR^3}{R_n}$. Or $TT'^2_n = TO'^2_n - R'^2_n = TO'^2_0 + O'_0O'^2_n - R^2_n$, donc $TT'^2_n = (2R + kR)^2 + (2nkR)^2 - (kR)^2$.
On en déduit que : $\frac{4kR^3}{R_n} = (2R + kR)^2 + (2nkR)^2 - (kR)^2$,
et donc $R_n = \frac{4kR^3}{4R^2+4kR^2+4n^2k^2R^2} = \frac{kR}{n^2k^2+k+1}$.

<u>Conclusion :</u> nous allons maintenant appliquer le résultat obtenu à notre problème.
Pour r_n : on a $k = \frac{AB}{BT} = \frac{1}{2}$ et $R = 3r$, donc $r_n = \frac{\frac{3r}{2}}{\frac{n^2}{4}+\frac{3}{2}} = \frac{6r}{n^2+6}$.
Pour t_n : on a $k = \frac{BC}{CT} = 1$ et $R = 2r$, donc $t_n = \frac{2r}{n^2+2}$.

Enfin :

$$\frac{r_n}{3 - \frac{r_n}{t_n}} = \frac{r_n}{3 - \frac{6r(n^2+2)}{2r(n^2+6)}} = \frac{r}{2}.$$