

TD 1

Nomenclature officielle

PARI/GP	le système complet,
PARI ou libpari	la bibliothèque,
gp	le calculateur i.e. ce que vous utilisez,
GP	le langage utilisé pour programmer le calculateur.

**Exercice 1.** L'objectif de cet exercice est de rappeler la méthode d'exponentiation binaire.

1. Étant donné  $n \in \mathbb{N}^*$ , écrire une procédure renvoyant la liste des chiffres de  $n$  dans son écriture en base 2 i.e.  $n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i$  où  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$  pour tout entier naturel  $i$  compris entre 0 et  $k$ .
2. En déduire un algorithme d'exponentiation efficace dans tout ensemble  $E$  muni d'une multiplication.
3. Le programmer pour  $E = \mathbb{N}^*$  et pour  $E = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  où  $n \geq 1$ .

**Exercice 2.** L'objectif de cet exercice est de rafraîchir votre mémoire arithmétique. Le petit théorème de Fermat affirme que si  $p$  est un nombre premier alors

$$\forall b \in \mathbb{Z}, \quad (b^p \equiv b \pmod{p}).$$

1. Justifier ce théorème.
2. Montrer en utilisant le théorème de Fermat que  $n = 10^5 + 7$  n'est pas un nombre premier.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la commande *isprime* et la commande *ispseudoprime*. Comparer ces deux commandes à l'aide de la documentation.
4. Trouver la décomposition de  $n$  en facteurs premiers à l'aide de la commande *factor*.
5. Les entiers naturels apparaissant dans le résultat précédent sont-ils réellement premiers ?
6. Étudier expérimentalement la réciproque du petit théorème de Fermat i.e. si

$$\forall b \in \mathbb{Z}, \quad (b^n \equiv b \pmod{n})$$

alors  $n$  est un nombre premier.

7. Un entier impair  $n$  est dit *pseudo-premier de base b* si  $n$  et  $b$  sont premiers entre eux et si  $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ . Un *entier de Carmichael* est un entier  $n$  non premier mais pseudo-premier pour toute base.
8. Dresser la liste de tous les nombres de Carmichael inférieurs à 10000 à l'aide de gp.

**Exercice 3.** La *méthode de cryptographie R.S.A* est très difficile à attaquer. Elle est devenue un standard dans le monde. Les lettres R.S.A. signifient Rivest-Shamir-Adleman du nom de ses inventeurs, qui l'ont mis au point en 1977. RSA est un algorithme dit « à clef publique » qui sert aussi bien au chiffrement de documents qu'à l'identification.

Le principe d'un algorithme à clef publique est que la méthode pour chiffrer le message est connue de tout le monde, mais qu'une seule personne sait déchiffrer. Dans le cas du codage RSA, tous les agents reçoivent la clef publique, un couple  $(n, d)$  tel que  $n$  est un nombre (très grand en général, et qui est le produit de deux facteurs premiers  $p$  et  $q$ ), et  $d$  choisi tel que  $d$  et  $(p-1)(q-1)$  sont premiers entre eux. La clé privée du décodeur est l'entier  $e$  tel que  $1 < e < (p-1)(q-1)$  et

$$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

La sécurité de ce code vient du fait qu'il est très difficile de trouver la décomposition en facteurs premiers  $n = pq$  du nombre  $n$ .

Le message est exprimé à l'aide des entiers choisis dans  $\Sigma = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Pour le chiffrer un caractère, on utilise l'application

$$\Theta : \sigma \in \Sigma \mapsto \sigma^d \pmod n.$$

Pour déchiffrer, on effectue

$$\Xi : \sigma \in \Sigma \mapsto \sigma^e \pmod n.$$

Cette technique est justifiée par le petit théorème de Fermat, qui dans notre cas s'écrit : pour tout entier  $x$  et pour tout entier  $\ell$ ,

$$x^{\ell(p-1)(q-1)+1} \equiv x \pmod n.$$

Ainsi la propriété  $ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$  garantit que  $\Xi \circ \Theta = \text{Id}$ .

1. Écrivez une procédure de chiffrement **RSA** qui chiffre l'entier  $s$  avec la clef publique  $(n, d)$ .
2. Chiffrez le message 1234567890 en utilisant la clef publique  $n = 21556703041$  et  $d = 7$ .
3. Déchiffrez le message 8509780874 en utilisant la clef privée  $n = 34675796329$  et  $e = 30595937633$ .
4. Dans les deux cas précédents, cassez le cryptosystème, i.e. retrouvez les valeurs  $\{p, q\}$ ,  $d$  et  $e$ .
5. Écrivez une procédure **GenClef** qui génère aléatoirement une clef publique  $(n, d)$  et une clef privée  $(n, e)$  où  $n$  est le produit de deux nombres premiers  $p, q$  choisis au hasard parmi les  $10^7$  premiers nombres premiers et  $e$  est choisi uniformément entre 2 et  $(p-1)(q-1) - 2$ .

**Exercice 4.** L'objectif de cet exercice est de pouvoir manipuler de façon pratique les corps finis et les polynômes à coefficients dans les corps finis.

1. Soit  $p$  un nombre premier.
  - (a) Soit  $\mathbb{F}_p$  "le" corps fini à  $p$  éléments. Donner un modèle simple de ce corps fini.
  - (b) Montrer que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{F}_p$ ,
 
$$x^p = x.$$
  - (c) Écrire les tables d'addition et de multiplication de  $\mathbb{F}_7$  en s'aidant de gp.
2. Soit  $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 4X - 3$ .
  - (a) Factoriser  $P$  à l'aide de gp dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{Z}[X]$ .
  - (b) Calculer à l'aide de gp le discriminant de  $P$ .
  - (c) Factoriser à l'aide de gp ce polynôme dans  $\mathbb{F}_2[X], \mathbb{F}_{11}[X], \mathbb{F}_{13}[X], \mathbb{F}_{23}[X], \mathbb{F}_{31}[X], \mathbb{F}_{37}[X]$ .  
Que remarquez-vous?
3. Soit  $\mathbb{F}_4$  "le" corps fini à 4 éléments. Montrer que  $\mathbb{F}_4$  est isomorphe en tant que corps à

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1).$$

Écrire les tables d'addition et de multiplication de ce corps en s'aidant de gp.

4. On cherche à décrire explicitement  $\mathbb{F}_8$ .
  - (a) Soit  $x$  dans  $\mathbb{F}_8 \setminus \mathbb{F}_2$ . Montrer que  $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[x]$ .
  - (b) En déduire que  $\mathbb{F}_8$  est isomorphe en tant que corps à  $\mathbb{F}_2[X]/(Q(X))$  où  $Q(X)$  est le polynôme minimal de  $x$  sur  $\mathbb{F}_2$ . Rappelez les propriétés d'un tel polynôme.
  - (c) Combien existe-t-il de polynômes de degré 3 à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$ ? Dressez la liste des polynômes de degré 3 à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_2$ -irréductibles en s'aidant de gp.
  - (d) En déduire que  $\mathbb{F}_8$  est isomorphe en tant que corps à

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1) = \mathbb{F}_{8,1}$$

et à

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1) = \mathbb{F}_{8,2}.$$

- (e) Écrire les tables d'addition et de multiplication de  $\mathbb{F}_{8,1}$  et  $\mathbb{F}_{8,2}$  en s'aidant de gp.
- (f) Soit  $\alpha$  une racine de  $X^3 + X + 1$ . Montrer à l'aide de gp que  $\alpha^2$  et  $\alpha^4$  sont les autres racines de  $X^3 + X + 1$ . Montrer également à l'aide de gp que  $\alpha^3$ ,  $\alpha^5$  et  $\alpha^6$  sont les racines de  $X^3 + X^2 + 1$ .
- (g) En déduire que les tables de lois de  $\mathbb{F}_{8,1}$  et de  $\mathbb{F}_{8,2}$  sont équivalentes.
- (h) écrire un isomorphisme explicite entre  $\mathbb{F}_{8,1}$  et  $\mathbb{F}_{8,2}$ .
- (i) Vérifier à l'aide de gp que si  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathbb{F}_{8,1}$  alors

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2, \quad (x + y)^4 = x^4 + y^4, \quad (x + y)^8 = x^8 + y^8.$$

Généralisation ?

5. Soient  $p$  un nombre premier et  $Q(X)$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , de degré  $n \geq 1$  et  $\mathbb{F}_p$ -irréductible.
  - (a) Montrer que  $\mathbb{F}_p[X]/(Q(X))$  est "le" corps fini de cardinal  $q = p^n$  noté  $\mathbb{F}_q$ .
  - (b) Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{F}_q$  et pour tout entier naturel  $t$ ,

$$(x + y)^{p^t} = x^{p^t} + y^{p^t}.$$

- (c) En déduire que l'application

$$\begin{aligned} \text{Frob}_p : \mathbb{F}_q &\rightarrow \mathbb{F}_q \\ x &\mapsto x^p \end{aligned}$$

est un automorphisme<sup>1</sup> de  $\mathbb{F}_q$  dont les points fixes sont exactement les éléments de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

- (d) En déduire que pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{F}_q$  et tout entier naturel  $t$ ,

$$(Q(x))^{p^t} = Q(x^{p^t}).$$

- (e) En déduire également que si  $\alpha$  est une racine de  $Q(X)$  alors les autres racines de  $Q(X)$  sont  $\alpha^p, \alpha^{p^2}, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ .
6. Comment trouver un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , de degré  $n \geq 1$  et  $\mathbb{F}_p$ -irréductible ?
    - (a) Écrire une procédure permettant de tirer aléatoirement un polynôme de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ .
    - (b) Tester l'irréductibilité d'un tel polynôme de plusieurs façons.
    - (c) Donner une estimation du nombre d'essais à faire par rapport à  $n$  pour que le polynôme aléatoire fourni par la procédure précédente soit  $\mathbb{F}_p$ -irréductible.
  7. Tester sur des gros exemples tout ce qui a été vu dans cet exercice i.e.  $n > 10^3$  et/ou  $p > 10^{10}, 10^{100}$ . Qu'en pensez-vous ?

---

1.  $\text{Frob}_p$  est le **morphisme de Frobenius** de  $\mathbb{F}_q$