

Master CSI 1

Arithmétique 1

Feuille d'exercices n° 2.

Quotients, polynômes irréductibles, groupes d'unités, caractéristique

- 1] On étudie dans cet exercice les propriétés élémentaires d'anneaux commutatifs.
1. Montrez que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible sur \mathbb{F}_2 . En déduire que $K = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)\mathbb{F}_2[X]$ est un corps. Sans calculs, quel est l'ordre et la structure de K^* ?
 2. On note α la classe de X modulo $X^3 + X + 1$, i.e. l'image de X dans K . Donnez la liste des éléments de K en fonction de α ; calculez $(\alpha + 1)^3$ puis $(\alpha + 1)^{-1}$.
 3. Groupe des unités de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: donnez ses éléments, leur ordre ; en déduire la structure de $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*, \times)$.
 4. Donnez trois anneaux à 4 éléments non isomorphes. Décrivez leur groupe additif et leur groupe (multiplicatif) d'unités.
- 2] Soit K un corps. Montrez que, si $P(X)$ est un polynôme de $K[X]$ de degré d , un système de représentants du quotient $A = K[X]/P(X)K[X]$ est donné par l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré au plus égal à $d - 1$. Expliquez comment exécuter l'addition, la multiplication et l'inversion (éventuelle) dans $K[X]/P(X)K[X]$ sur ce système de représentants. En déduire (en l'explicitant) l'isomorphisme $(A, +) \simeq (K^d, +)$. Est-ce un isomorphisme d'anneaux ?
- 3] Faire la liste des polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_2 de degrés 1, 2, 3, 4. Quelle est la structure du groupe multiplicatif du quotient $\mathbb{F}_2[X]/P(X)$ pour ces polynômes P ?
- 4] Soit $P(X) = X^3 - X \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ et soit $A = ((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]) / (P(X)(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X])$.
1. En utilisant le théorème chinois, montrez que le groupe des unités de A est isomorphe à $((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*)^3$. En déduire le cardinal et la structure de A^* .
 2. Explicitiez cet isomorphisme ainsi que l'isomorphisme inverse.
- 5] La caractéristique d'un anneau :
1. Soit A un anneau commutatif. Donner la caractéristique des anneaux suivants :
$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}, \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, \quad A[X].$$
 2. Montrez que la caractéristique d'un corps est nécessairement soit 0 soit un nombre premier. Donnez un contreexemple à la réciproque.